

# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J.  
BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODOXY,  
WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN,  
CARL NEUMANN, ARNOLD SCHMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN

IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN

IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL

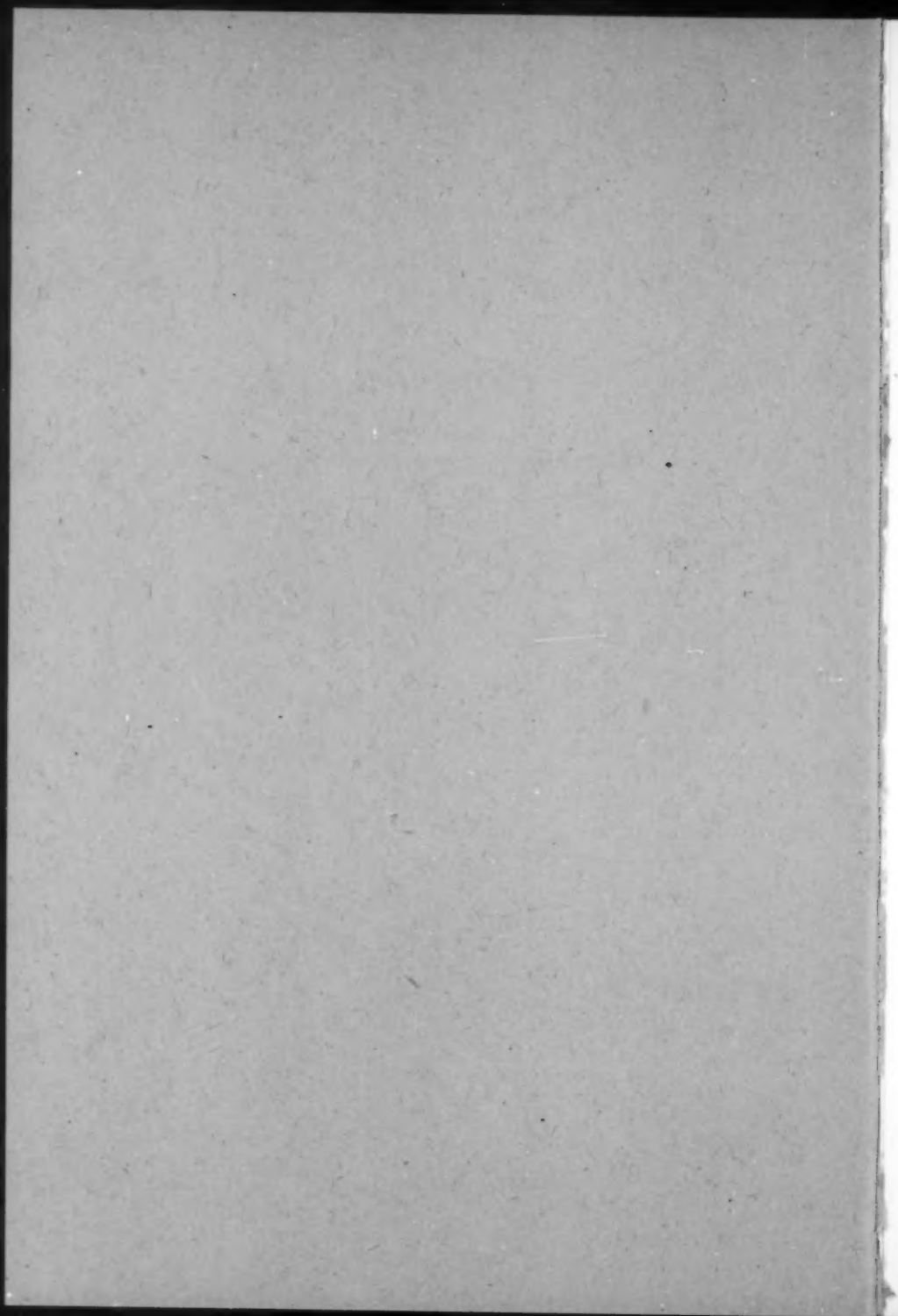
IN AACHEN

89. BAND



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1923





# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J.  
BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY,  
WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN,  
CARL NEUMANN, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN

IN GÜTTINGEN

DAVID HILBERT

IN GÜTTINGEN

ALBERT EINSTEIN

IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN.

89. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1923



# Inhalt des neunundachtzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
Artin, E., in Hamburg. Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper . . . . .	147
Blumenthal, O., in Aachen. Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Popoff „Über die Gewinnung summierbarer Potenzreihen aus summierbaren Fourier-Reihen“ . . . . .	126
Comessatti, A., in Padua (Italien). La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi . . . . .	272
van der Corput, J. G., in Groningen (Niederlande). Neue zahlentheoretische Abschätzungen . . . . .	215
Courant, R., in Göttingen. Zur Theorie der linearen Integralgleichungen . .	161
Doetsch, G., in Halle a. d. S. Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus . . . . .	192
Haupt, O., in Erlangen und E. Hilb in Würzburg. Oszillationstheoreme oberhalb der Stieltjes'schen Grenze . . . . .	130
Hertz, P., in Göttingen. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. Teil II. Sätze höheren Grades . . . . .	76
Hilb, E., in Würzburg und O. Haupt in Erlangen. Oszillationstheoreme oberhalb der Stieltjes'schen Grenze . . . . .	130
Löwner, K., in Berlin. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. . . . .	103
Mohrman, H., in Basel. Die Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve . . . . .	1
Mohrman, H., in Basel. Bestimmung aller algebraischen W-Kurven . . .	260
Mohrman, H., in Basel. Bemerkung zu E. Study's Aufsatz: „Über S. Lie's Geometrie der Kreise und Kugeln“. (Nachwort von E. Study) . . . .	315
v. Sz. Nagy, J., in Klausenburg. Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex . . . . .	32
Pólya, G., in Zürich. Analytische Fortsetzung und konvexe Kurven . . . .	179
Popoff, K., in Sofia. Über die Gewinnung summierbarer Polynomreihen aus summierbaren Fourierreihen . . . . .	122
Pöschl, Th., in Prag. Über die ebene radiale Strömung eines Gases mit Berücksichtigung der Reibung . . . . .	208
Scherrer, W., in Zürich. Zur Geometrie der Zahlen . . . . .	255
Study, E., in Bonn. Über S. Lie's Geometrie der Kreise und Kugeln. (Dritte Fortsetzung) . . . . .	298
Upadhyaya, P. O., in Calcutta (Indien). On a formula of transformation .	157
Berichtigungen von J. G. van der Corput . . . . .	160



# Die Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve.

Von

Hans Mohrmann in Basel.

## Inhalts-Übersicht.

Einleitung. Historisches.

- I. Die beiden Arten von windschiefen geradlinigen rationalen Normalflächen vierter Ordnung.
- II. Die Sehnen-Kongruenz der gewundenen Kurve dritter Ordnung  $C_3$  als Plückersches liniengeometrisches Bild der Veronesischen Fläche.
- III. Die beiden Arten von Flächen vierter Ordnung  $R_4$  mit irreduzibler Doppel- $C_3$ , charakterisiert durch die quadratische Involution [2], die ihre Erzeugenden unter den Punkten der Doppel- $C_3$  hervorrufen. Die kubisch-zyklische Involution [2].
- IV. Spezialfälle der  $R_4$  als Folge von Zerfall der quadratischen Involution [2] in zwei gemeine (bilineare) Involutionen (Reduzibilität der Fläche) oder in zwei gleichbedeutende nicht-involutorische Projektivitäten (Flächen mit ausschließlich Dorsallinien *gerader* Ordnung).
- V. Die Büschel von  $R_4$  mit derselben Doppel- $C_3$  und zwei gemeinsamen Dorsallinien zweiter, bzw. einer gemeinsamen Dorsallinie vierter Ordnung. Realitätsfragen.
- VI. Die automorphen Kollineationsgruppen der  $R_4$  mit ausschließlich Dorsallinien *gerader* Ordnung.

### Einleitung. Historisches.

Die irreduziblen algebraischen Flächen vierter Ordnung, die eine gewundene Kurve zur Doppelkurve haben, sind geradlinige rationale Flächen. Denn die gewundene Doppelkurve ist notwendig von der dritten Ordnung. Und durch jeden ihr nicht angehörenden Punkt der Fläche geht eine ihrer Sehnen, die mit der Fläche  $2 \cdot 2 + 1 = 5$  Punkte gemein hat, also ganz auf der Fläche liegt. Die Fläche ist daher geradlinig; und sie ist rational, weil ihr Schnitt mit einer Ebene allgemeiner Lage eine Kurve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten ist. Da eine rationale  $R_4$  das Plückersche liniengeometrische Bild einer rationalen Kurve vierter Ordnung ist und eine solche immer (wenigstens) in einem Raume von vier Dimensionen liegt, so gehört jede rationale  $R_4$  einem linearen Komplex an, der allgemein oder speziell sein kann.

Die windschiefen Flächen vierter Ordnung mit kubischer Doppelkurve sind mehrfach Gegenstand der Untersuchung gewesen; ihre neuerliche Behandlung bedarf daher wohl einiger Worte der Rechtfertigung. Schon Cayley<sup>1)</sup> und Cremona<sup>2)</sup> haben zwei Arten von  $R_4$  mit irreduzibler Doppel- $C_3$  unterschieden: Flächen erster Art  $R_4^I$ , deren Erzeugenden einem allgemeinen, und Flächen zweiter Art  $R_4^{II}$ , deren Erzeugenden einem speziellen linearen Komplex angehören. Clebsch, der den  $R_4$  mit irreduzibler Doppel- $C_3$  eine besondere Abhandlung<sup>3)</sup> gewidmet hat, definiert diese Flächen unter Hinweis auf die zitierte Arbeit von Cremona als Erzeugnis der Projektionsstrahlen zweier projektivisch aufeinander bezogenen Kegelschnitte. Obwohl er die so definierten Flächen als identisch mit dem Ort der Sehnen einer irreduziblen kubischen Kurve nachweist, die einem linearen Komplex angehören, betrachtet Clebsch doch nur die  $R_4^I$ , wohl in der Meinung, daß die  $R_4^{II}$  eine nur unwesentlich abweichende Spielart der  $R_4^I$  sei. Indes läßt sich nur die  $R_4^I$  durch projektiv aufeinander bezogene Kegelschnitte erzeugen, da die  $R_4^{II}$  überhaupt keine irreduziblen Kegelschnitte enthält<sup>4)</sup>. Diese ist vielmehr das Erzeugnis der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einer geraden Linie und einer projektiv auf diese bezogenen gewundenen Kurve dritter Ordnung. In der Tat sind beide Flächenarten, als Punktgebilde betrachtet, wesentlich voneinander unterschieden. Zwar sind beide allgemeine Projektionen von Normalflächen vierter Ordnung im Raume von fünf Dimensionen, aber die Normalflächen erster Art tragen doppelt binäre Gebiete; sie

<sup>1)</sup> Phil. Trans. 153 (1863), S. 453; 154 (1864), S. 559; 159 (1869), S. 111.

<sup>2)</sup> Mem. Acc. Bologna (2) 8 (1869), S. 235.

<sup>3)</sup> Math. Ann. 2, S. 445–466.

<sup>4)</sup> Doch ist die  $R_4^{II}$  wie die  $R_4^I$  der dualistischen Erzeugung fähig.

können ausnahmslos eindeutig umkehrbar und überall stetig auf eine Fläche zweiter Ordnung mit nicht-verschwindender Diskriminante abgebildet werden und gestatten eine mit der Gruppe der direkten Kreisverwandtschaften der Ebene holoeidrisch-isomorphe automorphe Kollineationsgruppe. Die Normalflächen zweiter Art hingegen tragen Jonquièressche Gebiete zweiter Ordnung zweiter Art<sup>5)</sup> und gestatten eine mit der automorphen Kollineationsgruppe des Kegels zweiter Ordnung holoeidrisch-isomorphe projektive Gruppe.

Von *liniengeometrischen* Gesichtspunkten ausgehend, hat dann zuerst Herr Voss in seiner großen Arbeit zur Theorie der windschiefen Flächen<sup>6)</sup> die Regelflächen betrachtet und erneut auf die Wichtigkeit der Beziehung der windschiefen Flächen zum linearen Komplex hingewiesen, insbesondere hinsichtlich der Klassifikation der  $R_4$ . Voss widmet den rationalen windschiefen Flächen ein besonderes Kapitel und hebt unter anderem hervor (was hier von Interesse ist), daß eine  $R_4$  mit irreduzibler Doppel- $C_3$  und einer Dorsallinie dritter oder vierter Ordnung, d. h. einer solchen, die durch Zusammenrücken von drei oder vier gewöhnlichen singulären Erzeugenden entsteht, niemals einem *speziellen* linearen Komplex angehören kann.

Wieder andere Gesichtspunkte leiteten Rohn in seiner, vor allem den Realitätsverhältnissen der verschiedenen Arten von Regelflächen vierten Grades gewidmeten Arbeit im 28. Bande der Math. Annalen<sup>7)</sup>. Er legt seiner Untersuchung der  $R_4$  mit kubischer Doppelkurve die symmetrische biquadratische Korrespondenz (quadratische Involution) [2] zugrunde, die die Erzeugenden der Fläche unter den Punkten ihrer Doppelkurve hervorruft. Allein die von Rohn aufgezählten Möglichkeiten erschöpfen (entgegen seiner ausdrücklich ausgesprochenen Überzeugung) *nicht* alle Spezialfälle der zweizweideutigen Verwandtschaft. Vielmehr fehlt bei Rohn der wichtige Spezialfall, in dem die quadratische Involution [2] *kubisch-zyklisch* wird. Gerade dieser Fall aber führt auf die  $R_4^{II}$  (deren Erzeugende einem speziellen linearen Komplex angehören).

Sturm<sup>8)</sup> endlich hat wohl zuerst vermerkt, daß die  $R_4^{II}$  keine (irreduziblen) Kegelschnitte enthält. Jeden analytischen Apparat verschmähend, beachtet er indessen nicht, daß die beiden wichtigsten Spezialfälle der asymmetrischen biquadratischen Verwandtschaft: der *Zerfall in zwei* (gleichbedeutende) *bilineare nicht-involutorische Korrespondenzen* und die *kubisch-zyklische Involution* einander teilweise überdecken. In der Tat schließen diese beiden Spezialfälle einander keineswegs aus;

<sup>5)</sup> Wegen dieser Bezeichnung vgl. Rend. Circ. mat. di Palermo 32 (1911), S. 173.

<sup>6)</sup> Math. Ann. 8, S. 54 ff.

<sup>7)</sup> S. 284 ff.

<sup>8)</sup> Liniengeometrie I (1896), S. 56.

vielmehr gibt es eine Art  $R_4$  (mit irreduzibler Doppel- $C_3$ ), die das Erzeugnis der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte jener projektiv auf sich selbst bezogenen kubischen Kurve ist, und deren Erzeugende einem speziellen linearen Komplex angehören. Man erhält sie in einfachster Weise als Ort der Sehnen einer gewundenen  $C_3$ , die die Schnittgerade zweier voneinander verschiedenen (im übrigen beliebigen) ihrer Schmiegungebenen treffen. Sind die Schmiegungebenen reell, so sind sämtliche (nicht-singulären) reellen Erzeugenden der Fläche ideelle Sehnen der Doppel- $C_3$ , sind sie konjugiert-imaginär, so stützen sie sich sämtlich auf je zwei reelle Punkte der  $C_3$ , längs der (ihrer ganzen Ausdehnung nach) der Mantel der Fläche sich selbst durchsetzt. Die Projektivität, die die Erzeugenden dieser  $R_4''$  unter den Punkten ihrer Doppel- $C_3$  hervorrufen, ist dadurch gekennzeichnet, daß das charakteristische Doppelverhältnis, das ein Paar entsprechender Punkte mit den Fixpunkten der Projektivität bildet, gleich einer *imaginären dritten Einheitswurzel* ist.

Die den beiden Fixpunkten zugeordneten Tangenten der Doppel- $C_3$  sind, wie in allen Fällen nicht ausgearteter Projektivität, Dorsallinien zweiter Ordnung der  $R_4$ . Wird die Projektivität *parabolisch*, so vereinigen sich die beiden Dorsallinien zweiter Ordnung zu einer einzigen Dorsallinie vierter Ordnung. Diese Fläche gehört, wie schon erwähnt, niemals einem speziellen linearen Komplex an.

Umgekehrt rufen die Erzeugenden aller  $R_4$  mit (irreduzibler kubischer Doppelkurve und) ausschließlich Dorsallinien *gerader* Ordnung immer *Projektivitäten* unter den Punkten der Doppel- $C_3$  hervor. Diese  $R_4$  sind überdies dadurch vor den übrigen ausgezeichnet, daß (ihre algebraische Haupttangentenkurve zerfällt und daß) sie *eingliedrige*, schon im Komplexen gemischte automorphe Gruppen von Kollineationen gestatten<sup>9)</sup>, die übrigens *jede* Fläche des ganzen Büschels von  $R_4$ , die dieselbe  $C_3$  zur Doppelkurve und dieselben Geraden zu Dorsallinien gerader Ordnung haben, einzeln stehen lassen.

Besitzt die  $R_4$  zwei getrennte Dorsallinien zweiter Ordnung, so sind die automorphen Kollineationen der Schar mit Gruppeneigenschaft dadurch charakterisiert, daß sie die Kuspidalpunkte der Fläche in sich transformieren, während die Kollineationen der anderen Schar sie miteinander vertauschen. Bei der  $R_4$  mit einer Dorsallinie vierter Ordnung versagt diese Charakterisierung, da hier die Kuspidalpunkte zusammenfallen. Gleichwohl bleibt auch hier die automorphe Gruppe gemischt: Die Kollineationen der Schar mit Gruppeneigenschaft vertauschen die Punkte der Doppel- $C_3$  *parabolisch*; diejenigen der anderen Schar *involutorisch*, wobei

<sup>9)</sup> Für die  $R_4$  mit zwei getrennten Dorsallinien zweiter Ordnung ist die automorphe Kollineationsgruppe, auf Grund der Gleichung der Fläche in Punktkoordinaten, schon von Rohn (a. a. O., S. 305) gefunden worden.



der eine Fixpunkt im Kuspidalpunkte der Dorsallinie vierter Ordnung liegt, während der andere die ganze Kurve durchläuft. In beiden Fällen sind die automorphen Kollineationen der Schar *ohne* Gruppeneigenschaft *windschiefe „Perspektiven“*, deren Achsen Flächen bilden, die ihrerseits nur ausgezeichnete Dorsallinien besitzen und projektive Gruppen gestatten, die *zwei-* bzw. *dreigliedrig* sind.

Diese Dinge darzulegen und die berührten Fragen abzuklären, die aufgewiesenen Lücken auszufüllen und für alle möglichen Spezialfälle der  $R_4$  mit irreduzibler Doppel- $C_3$  vollständige Kriterien zu geben, ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung.

## I.

**Die beiden Arten von windschiefen geradlinigen rationalen Normalflächen.**

Für das Studium algebraischer geometrischer Gebilde, und die Geometrie auf ihnen, hat es sich oft als zweckmäßig erwiesen, von der Betrachtung der Normalgebilde gleicher Ordnung auszugehen, als deren (mehr oder minder allgemeine) Projektionen die zu erforschenden Gebilde aufgefaßt werden können, obwohl hierzu meist mehrdimensionale, also scheinbar höhere Mittel erforderlich sind. Das gilt insbesondere für die in Frage stehenden Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve, deren beide Arten sich unmittelbar als allgemeine Projektionen von Normalflächen gleicher Erzeugung darbieten.

Es gibt genau *vier* verschiedene Familien von (zweidimensionalen) Normalflächen vierter Ordnung<sup>10)</sup>, die eine im Lieschen Sinne kontinuierliche transitive automorphe Gruppe von projektiven Transformationen gestatten. Denn die Familien dieser Flächen lassen sich durch die Werte dreier ganzer Zahlen  $\alpha, \beta, n$  charakterisieren<sup>11)</sup>, die den vier Ungleichungen:

$$\alpha > 0, \quad \beta \geq 0, \quad n \geq 0, \quad n + \beta \neq 0$$

genügen, wobei die Ordnung  $O$  einer Fläche der Familie  $[\alpha, \beta, n]$

$$O = \alpha(n\alpha + 2\beta)$$

ist, woraus sich die den folgenden Kombinationen zugeordneten *vier* Familien ergeben:

	$\alpha$	$\beta$	$n$
I	1	2	0
II	1	1	2
III	1	0	4
IV	2	0	1

<sup>10)</sup> Study, Geometrie der Dynamen, S. 333.

<sup>11)</sup> Mohrmann, Rend. Circ. mat. di Palermo **32** (1911), S. 183.

Sie gehören somit genau je einer der vier wohl unterschiedenen Klassen an, in die sich die Familien der Normalflächen mit transitiver automorpher kontinuierlicher Kollineationsgruppe, den Arten der von ihnen getragenen Gebiete entsprechend, einteilen lassen. Man erkennt leicht, daß die Flächen aller vier Familien einem linearen Raum von (mindestens) *fünf* Dimensionen angehören.

Die Flächen mit  $\alpha = 1$  sind *geradlinige* Flächen und zwar sind die Flächen der Familien I und II windschiefe Flächen mit sechs- bzw. sieben-gliedriger automorpher Kollineationsgruppe, die mit der Gruppe der direkten *Kreisverwandtschaften* der Euklidischen Ebene bzw. der Gruppe der *Ähnlichkeitstransformationen* des Euklidischen Raumes holodrisch-isomorph sind.

Die Flächen der III. Familie sind die rationalen Normalkegel vierter Ordnung; sie gestatten eine  $n + 5 = 9$ -gliedrige automorphe projektive Gruppe, die durch die linearen Substitutionen des von ihnen getragenen Jonquièresschen Gebietes (vierter Ordnung, erster Art) induziert wird.

Die Flächen der IV. Familie endlich enthalten keine geraden Linien, wie überhaupt keine algebraische Kurve ungerader Ordnung. Es sind die sogenannten Veronesischen Flächen, die uns sogleich in anderem Zusammenhang interessieren werden (Kap. II); sie sind Trägerinnen *ternärer* Gebiete und ihre achtgliedrige automorphe Gruppe ist holodrisch-isomorph mit der Gruppe aller Kollineationen der Ebene. Für unsere Aufgabe kommen somit unmittelbar nur die Flächen erster und zweiter Art in Betracht. Und in der Tat sind ihre allgemeinen Projektionen in den Raum von drei Dimensionen, wie leicht ersichtlich, gerade die zu betrachtenden Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve, deren es somit zwei wesentlich unterschiedene Arten gibt: *die  $R_4^I$  tragen doppelt binäre Gebiete, die  $R_4^{II}$  Jonquièressche Gebiete zweiter Ordnung zweiter Art.*

Die Gleichungen der Normalflächen erster Art lassen sich mit Benutzung der Studyschen Normalkoordinaten folgendermaßen schreiben

$$(R_4^I) \quad \begin{cases} x_1 = t_1^3 \tau_1, \\ x_2 = t_1 t_2 \tau_1, \\ x_3 = t_2^3 \tau_1, \\ x_4 = t_1^3 \tau_2, \\ x_5 = t_1 t_2 \tau_2, \\ x_6 = t_2^3 \tau_2. \end{cases}$$

Dabei sind als äquivalent zu betrachten zwei Wertsysteme:

$$\begin{cases} t_1 & t_2; & \tau_1 \cdot \tau_2 & (\varrho \neq 0), \\ \varrho t_1 & \varrho t_2; & \sigma \tau_1 \sigma \tau_2 & (\sigma \neq 0), \end{cases}$$

wo  $\varrho$  und  $\sigma$  voneinander unabhängige Proportionalitätsfaktoren bedeuten, und auszuschließen die Systeme, für die:

$$t_1 = 0 \text{ und } t_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \tau_1 = 0 \text{ und } \tau_2 = 0$$

wird (und nur diese).  $t_1:t_2 = \text{konst.}$  gibt die Schar der  $\infty^1$  geradlinigen Erzeugenden, während  $\tau_1:\tau_2 = \text{konst.}$  eine Schar von  $\infty^1$  irreduziblen Kegelschnitten auf der Fläche liefert, deren Punkte durch die geradlinigen Erzeugenden der Fläche projektiv aufeinander bezogen werden. Die Fläche kann somit definiert werden als Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektiv aufeinander bezogener irreduzibler Kegelschnitte (deren Ebenen keinen Punkt miteinander gemein haben) in möglichst allgemeiner Lage, eine Definition, die bei allgemeiner Projektion in den Raum von drei Dimensionen erhalten bleibt, also auch für die erste Art  $R_4^I$  der von uns zu behandelnden Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve gilt.

Die Gleichungen der Normalfläche zweiter Art erhält man in der einfachsten Form, wenn man die Koordinaten ihrer Punkte einem vollständigen System von linear unabhängigen Produkten der zu den Werten  $\alpha=1$ ,  $\beta=1$  und  $\kappa=2$  gehörigen Normalkoordinaten eines Jonquièresschen Gebietes zweiter Ordnung zweiter Art gleichsetzt:

$$(R_4^{II}) \quad \begin{cases} x_1 = t_{00}t_1, \\ x_2 = t_{00}t_2, \\ x_3 = t_1^2t, \\ x_4 = t_1^2t_2t, \\ x_5 = t_1t_2^2t, \\ x_6 = t_2^3t. \end{cases}$$

Darin sind zwei Wertesysteme

$$\begin{cases} t_{00} & t_1 & t_2 & t \\ \varrho^2 \sigma t_{00} & \varrho t_1 & \varrho t_2 & \sigma t \end{cases} \quad \begin{matrix} (\varrho + 0), \\ (\sigma + 0), \end{matrix}$$

wo  $\varrho$  und  $\sigma$  wieder zwei voneinander unabhängige Proportionalitätsfaktoren bedeuten, als äquivalent zu betrachten, und auszuschließen die Systeme (und nur diese), für die gleichzeitig:

$$t_1 = 0 \text{ und } t_2 = 0 \quad \text{oder} \quad t_{00} = 0 \text{ und } t = 0$$

wird.

$t=0$  gibt die (einzige) gerade Leitlinie der Fläche, während  $t_{00}=0$  eine rationale Normalkurve dritter Ordnung liefert, deren Punkte durch die  $\infty^1$  Erzeugenden der Fläche  $t_1:t_2 = \text{konst.}$  projektiv auf die Punkte der Leitgeraden bezogen sind. Die Fläche kann demnach definiert werden als Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einer geraden Linie

und einer projektiv auf sie bezogenen gewundenen Kurve dritter Ordnung (deren Normalraum mit der Leitgeraden keinen Punkt gemein hat) in möglichst allgemeiner Lage. Nächste den  $\infty^1$  Erzeugenden und der (isolierten) Leitgeraden sind die irreduziblen Kurven *niedrigster* Ordnung auf der Fläche diejenigen, welche die Leitgerade *nicht* und jede Erzeugende in einem Punkte schneiden, d. h. rationale Normalkurven dritter Ordnung, deren die Fläche  $\infty^3$  enthält: durch drei Punkte allgemeiner Lage geht eine einzige von ihnen hindurch. Die Fläche enthält somit keine eigentlichen (irreduziblen) Kegelschnitte. Das gleiche gilt von ihrer allgemeinen Projektion in den Raum von drei Dimensionen der von uns zu behandelnden  $R_4^{II}$ , die daher, wie jene, am einfachsten definiert werden kann, als Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einer geraden Linie und einer projektiv auf sie bezogenen gewundenen Kurve dritter Ordnung in allgemeiner Lage<sup>12)</sup>.

Die automorphe Kollineationsgruppe der Normalfläche  $R_4^I$  wird induziert durch die  $2 \cdot 3 = 6$  gliedrige Gruppe der linearen Substitutionen des von ihr getragenen doppelt binären Gebietes:

$$\begin{cases} t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2, \\ t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{cases} \tau_1^* = \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2, \\ \tau_2^* = \beta_1 \tau_1 + \beta_2 \tau_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

während die automorphe Gruppe von Kollineationen der Normalfläche  $R_4^{II}$  durch die  $n + 5 = 7$  gliedrige Gruppe der „linearen“ Substitutionen des von ihr getragenen Jonquièresschen Gebietes zweiter Ordnung zweiter Art induziert wird:

$$\begin{cases} t_{00}^* = c_{00} t_{00} + c_{11} t_1^2 + 2c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2, \\ t_1^* = a_1 t_1 + a_2 t_2, \\ t_2^* = b_1 t_1 + b_2 t_2, \\ t^* = t \end{cases} \quad c_{00} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Strukturen der Gruppen lassen sich somit leicht übersehen.

Vermittels der von ihnen getragenen Gebiete werden die  $R_4^I$  ausnahmslos eindeutig umkehrbar und überall stetig auf eine Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Diskriminante abgebildet, die  $R_4^{II}$  hingegen, soweit es sich um der Leitgeraden nicht angehörende Punkte handelt, auf die Punkte allgemeiner Lage eines Kegels zweiter Ordnung, während die Punkte der Leitgeraden dem Scheitel des Kegels entsprechen, wobei

<sup>12)</sup> Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 2. 4. Auflage (1907), S. 303.

die automorphen projektiven Gruppen in die automorphen Kollineationsgruppen der entsprechenden Gebilde übergehen. Während aber die Gesamtkollineationsgruppe einer allgemeinen Fläche zweiten Grades gemischt ist, nämlich aus zwei kontinuierlichen Scharen besteht, von denen nur die eine für sich Gruppeneigenschaft hat, entsprechen nur den Kollineationen dieser wieder Kollineationen im Raum der Normal- $R_4^f$ , da hier, im Gegensatz zur Fläche zweiten Grades mit ihren zwei  $\infty^1$ -Systemen von geradlinigen Erzeugenden, nur die eine „Erzeugenden-Schar“ aus geraden Linien, die andere  $\infty^1$ -Schar aber aus irreduziblen Kegelschnitten besteht, die nicht mit den geraden Linien kollinear vertauscht werden können.

## II.

### Die Sehnenkongruenz der gewundenen kubischen Kurve als Plückersches liniengeometrisches Bild der Veroneseschen Fläche.

Die Elemente-Paare eines binären Gebietes bilden ein ternäres Gebiet, wie man vielleicht am einfachsten erkennt, wenn man das binäre Gebiet auf einem (irreduziblen) Kegelschnitt ausbreitet und als Repräsentanten der Punktepaare die geraden Linien der Ebene des Kegelschnittes betrachtet. Da eine gewundene Kurve dritter Ordnung rationale Normalkurve und als solche Trägerin eines binären Gebietes ist, so müssen ihre Sehnen den Elementen eines ternären Gebietes eineindeutig zugeordnet werden können. In der Tat erscheint die Sehnenkongruenz der gewundenen  $C_3$ , wenn man in bekannter Weise die Plückerschen Koordinaten einer geraden Linie im Raum als Punktkoordinaten im Raume von fünf Dimensionen deutet, als das liniengeometrische Bild der nächst der projektiven Ebene einfachsten Normalfläche, die ein ternäres Gebiet trägt, der sogenannten (schon im I. Kapitel erwähnten) Veroneseschen Fläche.

Wählt man die Koordinaten der Punkte der  $C_3$  als rationale ganze Funktionen eines Parameter  $\lambda$ , indem man als Koordinaten-Tetraeder ein *Schmiegungetetraeder* benutzt, so hat man:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda^3 = \mu^3, \\ x_2 = \lambda^2 = \mu^2, \\ x_3 = \lambda = \mu, \\ x_4 = 1 = 1, \end{cases}$$

woraus sich, wegen

$$p_{ik} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

ergibt:

$$\begin{cases} p_{12} = \lambda^2 \mu^2, \\ p_{13} = \lambda \mu (\lambda + \mu), \\ p_{14} = \lambda^3 + \lambda \mu + \mu^3, \end{cases} \quad \begin{cases} p_{31} = 1, \\ p_{42} = -(\lambda + \mu), \\ p_{23} = \lambda \mu. \end{cases}$$

Setzt man hierin:

$$(2) \quad \lambda + \mu = t_1, \quad \lambda \mu = t_2$$

und homogenisiert, so kommt:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{12} = t_2^2, \\ p_{13} = t_1 t_2, \\ p_{14} = t_1^2 - t_2 t_3, \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} p_{34} = t_3^2, \\ p_{42} = -t_1 t_3, \\ p_{23} = t_2 t_3, \end{array} \right.$$

d. h. die Plückerschen Linienkoordinaten  $p_{ik}$  sind sechs linear unabhängigen homogenen Funktionen zweiten Grades in  $t_1 : t_2 : t_3$  proportional; sie können daher als Punktkoordinaten einer Veroneseschen Fläche gedeutet werden, die für den Raum von fünf Dimensionen *normal* (und Trägerin eines ternären Gebietes) ist.

*Die Geometrie in der Sehnenkongruenz einer gewundenen kubischen Kurve erscheint somit als die Geometrie auf einer Veroneseschen Fläche.*

Hieraus ergeben sich unmittelbar die folgenden für unsere weiteren Betrachtungen wichtigen Sätze:

*Die Sehnen-Kongruenz einer gewundenen kubischen Kurve enthält nur Linienflächen gerader Ordnung.*

*Die irreduziblen Linienflächen vierten Grades in ihr sind notwendig rational; sie können keine Doppelerzeugende besitzen und gehören (als liniengeometrische Bilder rationaler Normalkurven vierter Ordnung) immer einem und nur einem linearen Komplex an (der allgemein oder speziell sein kann).*

*Gehört eine Linienfläche vierten Grades mehr als einem linearen Komplex an, so besteht sie aus zwei (getrennten oder zusammenfallenden, nicht-degenerierten oder degenerierten) irreduziblen Flächen zweiter Ordnung.*

### III.

Die beiden Arten von Flächen vierter Ordnung  $R_4$  mit irreduzibler kubischer Doppelkurve, charakterisiert durch die quadratische Involution [2], die ihre Erzeugenden unter den Punkten ihrer Doppel- $C_3$  hervorrufen. Die kubisch-zyklische Involution [2].

Den beiden Arten von rationalen windschiefen geradlinigen Normalflächen vierter Ordnung entsprechend gibt es, wie wir gesehen haben, zwei wesentlich verschiedene Arten windschiefer Flächen vierter Ordnung mit irreduzibler Doppel- $C_3$ : Sie sind die allgemeinsten Projektionen jener Normalflächen in dem Raum von drei Dimensionen und können wie jene definiert werden als Ort der Verbindungsgerechten entsprechender

Punkte zweier projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnitte, bzw. einer Geraden und einer projektiv auf diese bezogenen gewundenen Kurve dritter Ordnung, wobei die Projektivitäten und ihre Trägergebilde sich in hinreichend allgemeiner Lage befinden müssen, wenn die Doppel- $C_3$  irreduzibel sein soll.

Daß umgekehrt jede Fläche vierter Ordnung mit irreduzibler Doppel- $C_3$  in der angegebenen Art erzeugt werden kann, läßt sich unschwer wie folgt erweisen:

a) Enthält eine Ebene durch zwei Erzeugende der Fläche noch eine dritte Erzeugende, so ist der Restschnitt eine gerade Linie, die notwendig einfache Leitgerade ist. Eine Fläche dritter Ordnung durch die kubische Doppelkurve und die windschiefe Erzeugende der  $R_4$  schneidet aus dieser noch eine Kurve der Ordnung  $3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 3 = 3$  aus, die die Leitgerade der  $R_4$  nicht trifft, aber jede Erzeugende der Fläche noch gerade einmal schneidet. Die Leitgerade wird daher durch die Erzeugenden der Fläche projektiv auf die kubische Restkurve bezogen; die  $R_4$  ist eine  $R_4^{II}$ . — Da eine Fläche dritter Ordnung von 19 Konstanten abhängt, für die angegebene Konstruktion aber nur  $10 + 2 \cdot 3 = 16$  Konstanten benötigt werden, so ergeben sich, in Übereinstimmung mit unseren früheren Angaben,  $\infty^3$  gewundene  $C_3$  auf der Fläche, deren jede in Verbindung mit der Leitgeraden zur Erzeugung der Fläche benutzt werden kann.

b) Gibt es keine Ebene, die mehr als zwei Erzeugende der  $R_4$  mit irreduzibler Doppel- $C_3$  enthält, so liegt in jeder Ebene durch zwei Erzeugende der  $R_4$  noch ein irreduzibler Kegelschnitt. Jeder dieser  $\infty^1$  Kegelschnitte wird auf jeden anderen durch die Erzeugenden der Fläche projektiv bezogen, die somit auf zweifach unendlich vielen Weisen als  $R_4^I$  erzeugt werden kann.

In beiden Fällen rufen die Erzeugenden der  $R_4$  unter den Punkten ihrer Doppel- $C_3$  eine *quadratische Involution* [2] hervor, die bei der  $R_4^I$  allgemein sein kann, bei der  $R_4^{II}$  hingegen notwendig spezialisiert, nämlich *kubisch-zyklisch* sein muß. Denn bei der  $R_4^{II}$  entsprechen irgend zwei einem Punkte der Doppel- $C_3$  vermöge der quadratischen Involution zugeordnete Punkte *einander*, so daß auf der Kurve  $\infty^1$  *Dreier-Zyklen* entstehen. Die  $R_4^{II}$  erscheint somit, wenn man von der quadratischen Involution auf der kubischen Doppelkurve ausgeht, als *spezieller Fall* der  $R_4^I$ . Die Beziehung aufzusuchen, die zwischen den Koeffizienten einer symmetrischen, biquadratischen Korrespondenz bestehen muß, damit sie kubisch-zyklisch wird, soll unsere nächste Aufgabe sein.

Schreiben wir zu diesem Zwecke die quadratische Involution [2] (in nicht-homogenen Parametern  $\lambda$  und  $\mu$ ) in der Form:

$$(4) \quad a\lambda^3\mu^3 + b\lambda\mu(\lambda + \mu) + c(\lambda^3 + \mu^3) + d\lambda\mu + e(\lambda + \mu) + f = 0,$$



und bezeichnen wir die beiden einem Werte  $\lambda$  vermöge (4) zugeordneten Parameterwerte  $\mu$  mit  $\mu'$  und  $\mu''$ , so muß neben der Gleichung (4) noch die Gleichung:

$$(5) \quad \begin{aligned} a\mu'^2\mu''^2 + b(\mu' + \mu'')\mu'\mu'' + c(\mu'^2 + \mu''^2) \\ + d\mu'\mu'' + e(\mu' + \mu'') + f = 0 \end{aligned}$$

bestehen. Ordnet man (4) nach fallenden Potenzen von  $\mu$ , so ergibt sich:

$$\mu^3[a\lambda^3 + b\lambda + c] + \mu[b\lambda^3 + d\lambda + e] + [c\lambda^3 + e\lambda + f] = 0.$$

Somit geht, wegen

$$\begin{cases} \mu'\mu'' = \frac{c\lambda^3 + e\lambda + f}{a\lambda^3 + b\lambda + c}, \\ \mu' + \mu'' = -\frac{b\lambda^3 + d\lambda + e}{a\lambda^3 + b\lambda + c} \end{cases}$$

(5) über in (5\*):

$$(5^*) \quad [af - be + c(d - c)][a\lambda^4 + 2b\lambda^3 + (2c + d)\lambda^2 + 2e\lambda + f] = 0,$$

eine Gleichung, die identisch (für jeden Wert von  $\lambda$ ) bestehen muß. Daraus folgt *entweder*:

$$(6) \quad \begin{cases} \text{oder:} & a = 0, \quad b = 0, \quad 2c + d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0 \\ & af - be + c(d - c) = 0. \end{cases}$$

Im ersten Falle reduziert sich die Gleichung der quadratischen Involution [2] auf die Form:

$$(7) \quad [\lambda - \mu]^2 = 0,$$

d. h. sie ist ausgeartet. Die zugehörige Fläche ist die Tangentenfläche der gewundenen Kurve dritter Ordnung (1), die für die Fläche stationäre Doppelkurve, nämlich „Rückkehrkante“ ist.

*Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine quadratische Involution (4) kubisch-zyklisch wird, lautet demnach:*

$$(I) \quad \boxed{af - be + c(d - c) = 0}.$$

Setzen wir wie früher (Kap. II)

$$(2) \quad \lambda + \mu = \frac{t_1}{t_2}, \quad \lambda\mu = \frac{t_2}{t_3},$$

so daß die Sehnen-Kongruenz der kubischen Kurve (1) durch die Gleichungen (3) gegeben ist:

$$(3) \quad \begin{cases} p_{12} = t_2^2, \\ p_{13} = t_1 t_2, \\ p_{14} = t_1^2 - t_2 t_3, \end{cases} \quad \begin{cases} p_{34} = t_2^2, \\ p_{42} = -t_1 t_3, \\ p_{23} = t_2 t_3, \end{cases}$$



so erkennt man leicht, daß (wie es sein muß) die Bedingung (I) zum Ausdruck bringt, daß der lineare Komplex (8):

$$(8) \quad a p_{12} + b p_{13} + c p_{14} + f p_{34} - e p_{42} + (d - c) p_{33} = 0,$$

dem jede  $R_4$  mit gewundener Doppelkurve (1) angehört, ein *spezieller* ist.

Man beachte dabei, daß die Bedingung (I) *nur hinreichend* dafür ist, daß eine  $R_4$  mit der Korrespondenzgleichung (4) einem *speziellen* linearen Komplex angehört, daß sie jedoch *keineswegs notwendig* ist. Vielmehr kann die Fläche außer dem linearen Komplex (8) noch einem zweiten (und damit wenigsten  $\infty^1$ ) linearen Komplexen angehören. Indes muß die Fläche in diesem Falle notwendig *reduzibel* sein, und zwar nach den Ausführungen des II. Kapitels in zwei getrennte oder zusammenfallende irreduzible Flächen zweiter Ordnung (mit nicht-verschwindender oder verschwindender Diskriminante) zerfallen.

Um ein Kriterium hierfür zu haben, ist eine besondere Untersuchung erforderlich, die im nächsten Abschnitt geführt werden soll, der zugleich die Frage klären soll, unter welchen Bedingungen eine quadratische Involution (4) in zwei für die zugehörigen Linienflächen gleichbedeutende Projektivitäten zerfällt.

#### IV.

**Spezielle Fälle der  $R_4$  als Folge von Zerfall der quadratischen Involution [2] in zwei gemeine (bilineare) Involutionen (Reduzibilität der Fläche), oder in zwei gleichbedeutende Projektivitäten (Flächen mit ausschließlich Dorsallinien gerader Ordnung).**

Die linke Seite der Korrespondenzgleichung (4) kann nur in zwei in bezug auf  $\lambda$  und  $\mu$  notwendig *bilineare rationale* Faktoren zerfallen:

$$(9) \quad \alpha \lambda^2 \mu^2 + b \lambda \mu (\lambda + \mu) + c (\lambda^2 + \mu^2) + d (\lambda \mu) + e (\lambda + \mu) + f \\ = (\alpha_1 \lambda \mu + \beta_1 \lambda + \gamma_1 \mu + \delta_1) (\alpha_2 \lambda \mu + \beta_2 \lambda + \gamma_2 \mu + \delta_2) = 0,$$

aber die *Aufspaltung kann auf zwei hinsichtlich der geometrischen Bedeutung wesentlich verschiedene Arten geschehen*: die beiden Faktoren können in bezug auf  $\lambda$  und  $\mu$  *symmetrisch* sein oder nicht.

Sind sie (jeder für sich) *symmetrisch*, d. h. ist in (9):

$$(10) \quad \beta_1 = \gamma_1 \quad \text{und} \quad \beta_2 = \gamma_2,$$

so ist die zugeordnete  $R_4$  *reduzibel*, und zwar zerfällt sie, in Übereinstimmung mit unseren früheren Ergebnissen (Kap. II), in zwei Flächen zweiter Ordnung. Die Bedingung, der die Koeffizienten der Korrespondenzgleichung (4) in diesem Falle genügen müssen, ergibt sich unschwer aus den folgenden sechs Gleichungen für die beiden Wertetripel

$$\alpha_1 : \beta_1 : \delta_1 \quad \text{und} \quad \alpha_2 : \beta_2 : \delta_2$$

$$(11) \quad \alpha_1 \alpha_2 = a,$$

$$(12) \quad \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = b,$$

$$(13) \quad \beta_1 \beta_2 = c,$$

$$(13) \quad \beta_1 \beta_2 = c,$$

$$(14) \quad \beta_1 \delta_2 + \delta_1 \beta_2 = e,$$

$$(15) \quad \delta_1 \delta_2 = f,$$

$$(16) \quad \delta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \delta_2 = d - 2c.$$

Die Gleichungen (11), (12), (13) und (13), (14), (15) bilden je für sich ein abgeschlossenes System, so daß ihre Lösungen, in (16) eingesetzt, die gesuchte Bedingung ergeben. Man findet:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}; \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$$

$$\frac{\delta_1}{\beta_1} = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}; \quad \frac{\delta_2}{\beta_2} = \frac{e \mp \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c};$$

und somit wegen

$$\frac{\delta_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\delta_2}{\beta_2} = \frac{d - 2c}{c}$$

$$(II) \quad (d - 2c)[c(d - 2c) - be] + b^2 f + e^2 a - 4acf = 0.$$

Die Bedingung der Reduzibilität (II) ist mithin eine einfache Bedingung.

Sind zweitens die beiden Faktoren (9), in die die quadratische Involution (4) zerfällt, nicht jeder für sich in bezug auf  $\lambda$  und  $\mu$  symmetrisch, so hat man die folgenden acht Gleichungen zur Bestimmung der Bedingungen, denen die Koeffizienten  $a:b:c:d:e:f$  alsdann genügen müssen:

$$(17) \quad \alpha_1 \alpha_2 = a = \alpha_1 \alpha_2,$$

$$(18) \quad \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = b = \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1,$$

$$(19) \quad \beta_1 \beta_2 = c = \gamma_1 \gamma_2,$$

$$(19) \quad \beta_1 \beta_2 = c = \gamma_1 \gamma_2,$$

$$(20) \quad \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 = e = \gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1$$

$$(21) \quad \delta_1 \delta_2 = f = \delta_1 \delta_2,$$

$$(22) \quad \alpha_1 \delta_2 + \delta_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2 = d.$$

Ist also  $\beta_1 + \gamma$ , und  $\beta_2 + \gamma_2$ , so folgt aus dem Doppelsystem der ersten vier Gleichungen (17), (18) und (19), nach denen die  $\beta$  und  $\gamma$  denselben Gleichungen genügen müssen, daß,

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

vorausgesetzt, was immer geschehen darf,

$$\beta_1 = \gamma_2 \quad \text{und} \quad \gamma_1 = \beta_2$$

sein muß. Alsdann folgt weiter aus dem Doppelsystem von Gleichungen (19), (20) und (21), daß

$$\delta_1 = \delta_2$$

sein muß. Allein die beiden Doppelsysteme sind nicht unabhängig voneinander: wegen

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \pm \sqrt{a} \\ \delta_1 = \delta_2 = \pm \sqrt{f} \end{cases}$$

ist

$$\beta_1 + \beta_2 = \pm \frac{b}{\sqrt{a}} = \pm \frac{e}{\sqrt{f}},$$

woraus sich als eine *erste* Bedingung (III<sub>1</sub>) ergibt:

$$(III_1) \quad b^2 f - e^2 a = 0.$$

Eine zweite Bedingung ergibt sich aus der Schlußgleichung (22) des Systems:

$$\alpha_1 \delta_2 + \alpha_2 \delta_1 + \beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2 = d,$$

wenn man zuvor die beiden Doppelsysteme auflöst und die gewonnenen Werte einsetzt. Man findet

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = d - 2\sqrt{af},$$

somit weiter, wegen

$$\delta^2 = f$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\beta_1}{\delta_1} \right)^2 + \left( \frac{\beta_2}{\delta_2} \right)^2 &= \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\delta^2} = \frac{d - 2\sqrt{af}}{f} \\ \frac{\beta_1 + \beta_2}{\delta} &= \frac{e}{f} \\ \frac{\beta_1 \beta_2}{\delta} &= \frac{c}{f} \end{aligned} \right.$$

also:

$$\frac{d - 2\sqrt{af}}{f} = \frac{e^2 - 2cf}{f^2}$$

und folglich endlich:

$$(III_2) \quad 4af^3 - [e^2 - f(2c + d)]^2 = 0.$$

Die Bedingungen  $(III_1)$  und  $(III_2)$  stellen das vollständige System jedoch nur dann dar, wenn  $f + 0$  ist.

$(III_2)$  geht vermöge  $(III_1)$  in die reziproke Beziehung  $(III_2^*)$  über:

$$(III_2^*) \quad 4fa^3 - [b^3 - a(2c + d)]^2 = 0,$$

d. h. in diejenige, die man erhält, wenn man in der Korrespondenzgleichung (4) an Stelle von  $\lambda$  und  $\mu$  ihre reziproken Werte setzt, wodurch  $a$  mit  $f$  und  $b$  mit  $e$  vertauscht werden, während  $c$  und  $d$  unverändert bleiben.

$(III_1)$  ist zu sich selbst reziprok.  $(III_2)$  und  $(III_2^*)$ , die wir kurz mit  $(III)$  zusammenfassen wollen:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4af^3 - [e^3 - f(2c + d)]^2 = 0, \\ 4fa^3 - [b^3 - a(2c + d)]^2 = 0, \end{array} \right.$$

geben ein vollständiges Kriterium für den Zerfall der quadratischen Involution (4) in zwei (gleichbedeutende) im allgemeinen nicht-involutorische Projektivitäten. Die Bedingung ist somit im Gegensatz zur Reduzibilitätsbedingung (II) zweifach.

Natürlich kann neben den Gleichungen (III) auch noch die Reduzibilitätsbedingung (II) erfüllt sein. In diesem Falle muß die linke Seite der Gleichung (4) entweder ein volles Quadrat sein oder aber auf doppelte Weise in zwei in bezug auf  $\lambda$  und  $\mu$  bilineare Faktoren (9) zerlegt werden können, was nur dadurch möglich ist, daß die einzelnen Faktoren selbst in rationale Faktoren aufgespalten werden können:

$$\begin{aligned} & [g^2\lambda\mu + gh(\lambda + \mu) + h^2][g^2\lambda\mu - gh(\lambda + \mu) + h^2] \\ &= [(g\lambda + h)(g\mu + h)][(g\lambda - h)(g\mu - h)] \\ &= [(g\lambda + h)(g\mu - h)][(g\lambda - h)(g\mu + h)] \\ &= [g^2\lambda\mu - gh(\lambda - \mu) - h^2][g^2\lambda\mu + gh(\lambda - \mu) - h^2], \end{aligned}$$

so daß man es notwendig mit zwei parabolischen Involutionen zu tun hat und die zugeordnete  $R_4$  in zwei irreduzible Kegel zweiter Ordnung zerfällt.

Zusammenfassend können wir sagen:

*Sind die Bedingungen (III) gleichzeitig mit der Reduzibilitätsbedingung (II) erfüllt, so ist die  $R_4$  eine doppelte Regelschar zweiter Ordnung, oder sie besteht aus zwei irreduziblen (getrennten oder zusammenfallenden) Kegeln zweiter Ordnung.*

Zerfällt die quadratische Involution in zwei gleichbedeutende Projektivitäten, so müssen sich notwendig zweimal zwei der vier sich selbst

entsprechende Punkte der quadratischen Involution (4) vereinigen, d. h. die *Koinzidenzgleichung*:

$$(24) \quad a\lambda^4 + 2b\lambda^3 + (2c+d)\lambda^2 + 2e\lambda + f = 0$$

muß notwendig zwei *Doppelwurzeln* haben. Die Bedingungen (III) lassen sich demnach auch in Gestalt einer gleich Null gesetzten Matrix schreiben:

$$(III^*) \quad \begin{vmatrix} 2a & 3b & 2c+d & e & 0 \\ 0 & 2a & 3b & 2c+d & e \\ b & 2c+d & 3e & 2f & 0 \\ 0 & b & 2c+d & 3e & 2f \end{vmatrix} = 0$$

oder auch durch die Forderung ersetzen, daß die linke Seite der *Koinzidenzgleichung* (24) sich von ihrer Hesseschen Determinante nur durch einen konstanten Faktor unterscheide.

Vereinigen sich zwei der vier sich selbst entsprechenden Punkte der quadratischen Involution (4), so rücken zwei der vier singulären Erzeugenden der zugeordneten  $R_4$  zusammen. Eine solche *Dorsallinie zweiter Ordnung* ist Tangente der kubischen Doppelkurve in dem zugeordneten Kuspidalpunkt zweiter Ordnung der Fläche, und die zugehörige parabolische Ebene (zweiter Ordnung) ist Schmiegeebene der Doppelkurve in dem Koinzidenzpunkte. Man hat daher den Satz: *Eine  $R_4$  mit gewundener Doppelkurve und einem Paar Dorsallinien zweiter Ordnung<sup>13)</sup> ist immer der Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der projektiv auf sich selbst bezogenen kubischen Doppelkurve.*

Rücken drei oder vier singuläre Erzeugende zusammen, so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es entspreche dieser Dorsallinie dritter oder vierter Ordnung der Parameterwert  $\lambda = 0$ . Die Gleichung der Korrespondenz (4) nimmt alsdann notwendig die Form:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \mu^3 + b \lambda \mu (\lambda + \mu) + c (\lambda^2 + \mu^2) - 2c \lambda \mu \\ & = \lambda^3 \mu^3 + b \lambda \mu (\lambda + \mu) + c (\lambda - \mu)^2 = 0 \end{aligned}$$

an, wo  $c$  nicht verschwinden darf, wenn die Fläche irreduzibel sein soll. Es ist also:

$$a = 1, \quad e = 0, \quad f = 0, \quad d = -2c \neq 0,$$

woraus auf Grund der Ausführungen von Kapitel III, da die linke Seite der Bedingung (I) die Form  $-3c^3$  annimmt, folgt: *Eine irreduzible windschiefe Fläche vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve und einer*

<sup>13)</sup> Ihre algebraische Haupttangentenkurve ist, wie die jeder einem linearen Komplex angehörnden rationalen windschiefen Fläche mit ausschließlich Dorsallinien gerader Ordnung, *reduzibel*; sie besteht aus zwei gewundenen Kurven dritter Ordnung.

*Dorsallinie dritter oder vierter Ordnung gehört niemals einem speziellen linearen Komplex<sup>14)</sup> an.*

Die zuletzt genannte Fläche erhält man für  $b = 0$ , so daß die Bedingungen (III) erfüllt sind. In der Tat nimmt die Korrespondenzgleichung hier die Form an:

$$[\lambda\mu + i\sqrt{c}(\lambda - \mu)][\lambda\mu - i\sqrt{c}(\lambda - \mu)] = 0,$$

d. h. sie spaltet in zwei gleichbedeutende Faktoren auf, deren jedem, gleich Null gesetzt, eine *parabolische* Projektivität entspricht: *Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen auf einer gewundenen Kurve dritter Ordnung, die sich in parabolischer Lage befinden, ist eine  $R_4$  mit einer Dorsallinie vierter Ordnung<sup>15)</sup>, die für die Fläche charakteristisch ist. Die Fläche ist irreduzibel und gehört niemals einem speziellen linearen Komplex an, solange die Projektivität nicht ausgeartet ist.*

#### V.

Die Büschel von Flächen vierter Ordnung mit derselben kubischen Doppelkurve und zwei gemeinsamen Dorsallinien zweiter Ordnung, bzw. einer gemeinsamen Dorsallinie vierter Ordnung. Realitätsfragen.

Unter den  $R_4$  mit gewundener Doppelkurve erheischen ein besonderes Interesse diejenigen, für die die quadratische Involution, die ihre Erzeugenden unter den Punkten der Doppelkurve hervorrufen, in zwei (gleichbedeutende) Projektivitäten zerfällt, die also als Ort der Verbindungsgeraden entsprechende Punkte einer projektiv auf sich selbst bezogenen gewundenen Kurve dritter Ordnung definiert werden können. Wie wir erkannten, ist für diese  $R_4$  *charakteristisch*, daß sie *nur Dorsallinien gerader Ordnung besitzen*: ein Paar getrennter Dorsallinien zweiter Ordnung, oder eine einzige Dorsallinie vierter Ordnung. In beiden Fällen bestimmt eine gewundene Kurve dritter Ordnung mit zwei getrennten oder einer ihrer Tangenten ein Büschel von  $R_4$ , die jene  $C_3$  zur Doppelkurve und jene Tangenten zu Dorsallinien zweiter bzw. vierter Ordnung haben. Während aber eine (irreduzible)  $R_4$  mit einer Dorsallinie vierter Ordnung niemals einem speziellen linearen Komplex angehört, ist dies wohl möglich für die Flächen mit zwei (getrennten) Dorsallinien zweiter Ordnung, wie die Betrachtung des erwähnten Flächenbüschels aufs einfachste ergibt.

Sind die beiden Dorsallinien reell, so lautet die zugehörige Korrespondenzgleichung

$$(25) \quad c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu = 0,$$

<sup>14)</sup> Vgl. Voss, a. a. O. S. 127.

<sup>15)</sup> Vgl. Rohn, a. a. O. S. 305.

wenn man die singulären Erzeugenden der  $R_4$  den Parameterwerten  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$  zuordnet. In der Tat sind alsdann, wegen  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $e = 0$ ,  $f = 0$  die Bedingungen (III) erfüllt. Schreibt man die Koordinaten der Punkte der Erzeugenden in der Form:

$$(26) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda^3 + \varrho \mu^3, \\ x_2 = \lambda^2 + \varrho \mu^2, \\ x_3 = \lambda + \varrho \mu, \\ x_4 = 1 + \varrho, \end{cases}$$

so erhält man durch Elimination von  $\varrho$

$$(27) \quad \begin{cases} x_3(\lambda + \mu) - x_4\lambda\mu - x_2 = 0, \\ x_2(\lambda + \mu) - x_3\lambda\mu - x_1 = 0 \end{cases}$$

und somit:

$$(28) \quad \lambda + \mu : \lambda\mu : 1 = \begin{vmatrix} x_3 & -x_4 & -x_2 \\ x_2 & -x_3 & -x_1 \end{vmatrix}.$$

Setzt man, wie früher (Kap. II):

$$\lambda + \mu : \lambda\mu : 1 = t_1 : t_2 : t_3,$$

so hat man:

$$t_1 : t_2 : t_3 = x_1x_4 - x_2x_3 : x_1x_3 - x_2^2 : x_2x_4 - x_3^2$$

und folglich, wenn man noch beachtet, daß sich die Korrespondenzgleichung (25) auch in der Gestalt

$$(25^*) \quad c(\lambda + \mu)^2 + (d - 2c)\lambda\mu = 0$$

schreiben läßt, die Gleichung des Flächenbüschels in Punktkoordinaten in der Form:

$$(29) \quad c(x_1x_4 - x_2x_3)^2 + (d - 2c)(x_1x_3 - x_2^2)(x_2x_4 - x_3^2) = 0.$$

Die Bedingung (I) dafür, daß die irreduzible  $R_4$  einem speziellen linearen Komplex angehört, reduziert sich hier auf die Form:

$$(I') \quad c(d - c) = 0$$

und die Reduzibilitätsbedingung (II) wird zu:

$$(II') \quad c(d - 2c)^2 = 0.$$

Für  $c = 0$  hat man somit eine reduzible Fläche; sie besteht aus zwei getrennten Bestandteilen:

$$t_1 = 0 \quad \text{und} \quad t_3 = 0,$$

deren jeder ein *Kegel* zweiter Ordnung ist. Die beiden Kegel sind die

Projektionskegel der Doppelkurve (1) der  $R_4$  aus den beiden Fixpunkten der gleichbedeutenden Projektivitäten:

$$(30) \quad \begin{cases} d + \sqrt{d^2 - 4c^2} \lambda + 2c\mu = 0, \\ d - \sqrt{d^2 - 4c^2} \lambda + 2c\mu = 0. \end{cases}$$

Aber auch für  $d = 2c$  hat man eine reduzible Fläche; sie wird gebildet von den Erzeugenden einer *doppeltzählenden windschiefen Regelschar zweiter Ordnung*, der die beiden gegebenen Tangenten der kubischen Kurve angehören; letztere trennen somit die reellen von den ideellen Sehnen der Kurve. Man beachte, daß der lineare Komplex (8)

$$(8) \quad ap_{12} + bp_{13} + cp_{14} + fp_{34} - ep_{12} + (d - c)p_{23} = 0,$$

dem jede  $R_4$  mit der kubischen Doppelkurve (1) angehört, hier die Form:

$$(31) \quad p_{14} - p_{23} = 0$$

annimmt, also nicht speziell wird. Dem Büschel (29) gehört vielmehr nur eine (irreduzible) Fläche an, für die jener Komplex speziell wird, die Fläche mit  $d = c$ . Die Gleichungen (30) der Projektivitäten, in die hier die quadratische Involution (4) zerfällt, nehmen die Formen an:

$$(32) \quad \begin{cases} \mu = \epsilon_1 \lambda, \\ \mu = \epsilon_2 \lambda, \end{cases}$$

wo  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  die beiden imaginären dritten Einheitswurzeln bedeuten. Diese Projektivitäten sind also in Übereinstimmung mit unseren früheren allgemeinen Untersuchungen *kubisch-zyklisch*, woraus sich eine einfache Definition dieser Flächen  $R_4^{II}$  ergibt, die auch ihre Realitätsverhältnisse unmittelbar übersehen läßt. Wir dürfen wohl sogleich den Satz aussprechen:

*Die Erzeugenden jeder Fläche vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve und zwei Dorsallinien zweiter Ordnung beziehen die Punkte der Doppelkurve projektiv aufeinander. Ist die Projektivität kubisch-zyklisch (und nur dann), so gehört die  $R_4$  einem (und nur einem) speziellen linearen Komplex an. Achse dieses Komplexes ist die Schnittgerade der Schmiegungebenen in den Koinzidenzpunkten der Projektivität. Die Fläche kann somit auch definiert werden als Ort der Sehnen einer gewundenen Kurve dritter Ordnung, welche die Schnittgerade zweier verschiedenen ihrer Schmiegungebenen treffen. Sind diese Ebenen reell, so sind sämtliche  $\infty^1$  nicht singulären reellen Erzeugenden der Fläche ideelle Sehnen der Doppel- $C_3$ . Sind die Schmiegungebenen konjugiert-imaginär, so sind sämtliche reellen Erzeugenden der Fläche eigentliche Sehnen der Doppelkurve, längs der (ihrer ganzen Ausdehnung nach) der einzige Mantel der  $R_4^{II}$  sich selbst durchsetzt.*



In dem Büschel von  $R_4$ , die eine und dieselbe gewundene  $C_3$  zur Doppelkurve und dieselben beiden (verschiedenen) Tangenten der  $C_3$  zu Dorsallinien zweiter Ordnung haben, befindet sich eine und nur eine  $R_4^{II}$ .

Die beiden gleichbedeutenden Projektivitäten (30) werden identisch gleich, wenn

$$d^2 - 4c^2 = 0$$

wird, d. h. für

$$d = \pm 2c.$$

Die Bedeutung von  $d = +2c$  wurde schon erörtert. Ist  $d = -2c$ , so nimmt die Korrespondenzgleichung (25) die Form an:

$$(7) \quad (\lambda - \mu)^2 = 0;$$

man erhält also die abwickelbare Fläche vierter Ordnung, deren Rückkehrkante die kubische Kurve ist. Zusammenfassend können wir den folgenden Satz aussprechen:

*Die nicht singulären reellen Erzeugenden der reellen Flächen des Büschels von  $R_4$  mit derselben gewundenen Doppel- $C_3$  und denselben beiden Dorsallinien zweiter Ordnung sind entweder sämtlich ideelle Sehnen der Doppelkurve oder sämtlich eigentliche, sich auf je zwei reelle Punkte der Doppel- $C_3$  stützende Sehnen. Der Mantel der Flächen mit lauter eigentlichen Sehnen durchsetzt sich längs der ganzen Doppelkurve. Die beiden Flächenkontinuen sind voneinander getrennt durch eine doppelt-zählende Regelschar zweiter Ordnung und die Tangentenfläche der Doppel- $C_3$ . Dem einen Kontinuum gehört eine weitere reduzible Fläche an; sie besteht aus den beiden Kegeln, die die Doppel- $C_3$  aus den gemeinsamen beiden Kuspidalpunkten der  $R_4$  des Büschels projizieren. Dem anderen Kontinuum gehört die (einzige, irreduzible)  $R_4^{II}$  an, die in einem (und nur einem) speziellen linearen Komplex enthalten ist. Alle übrigen Flächen des Büschels sind regulär und erster (allgemeiner) Art.*

Daß die zuletzt berührten Realitätsverhältnisse auch gültig sind, wenn die beiden gemeinsamen Dorsallinien zweiter Ordnung der  $R_4$  des Büschels konjugiert-imaginär sind, bedarf kaum einer weiteren Bestätigung, ergibt sich aber leicht, wenn man die entsprechenden Untersuchungen etwa für die Korrespondenzgleichung (33) mit den Koinzidenzpunkten  $\pm i$  führt:

$$(33) \quad \begin{cases} \lambda^2 \mu^2 + c(\lambda - \mu)^2 + 2\lambda\mu + 1 = 0 \\ = [\lambda\mu + i\sqrt{c}(\lambda - \mu) + 1][\lambda\mu - i\sqrt{c}(\lambda - \mu) + 1] = 0. \end{cases}$$

Wegen  $a = f = 1$ ,  $b = e = 0$  und  $d = 2(1 - c)$  sind die Bedingungen (III)

$$(III) \quad \begin{cases} 4af^2 - [c^2 - f(2c + d)]^2 = 0, \\ 4fa^2 - [b^2 - a(2c + d)]^2 = 0 \end{cases}$$

erfüllt; die Bedingungen (II) und (I) nehmen bezüglich die Formen an:

$$(II'') \quad c^3(c-1) = 0,$$

$$(I'') \quad 3c^3 - 2c - 1 \equiv 3(c-1)\left(c + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Für  $c = 1$  läßt sich, wegen

$$\lambda\mu \pm i(\lambda - \mu) - 1 = (\lambda \mp i)(\mu \pm i) = 0,$$

die Korrespondenzgleichung in ein Produkt *parabolischer Involutionen*

$$\lambda\mu \pm i(\lambda + \mu) - 1 = 0$$

aufspalten, so daß die reduzible Fläche wieder von den beiden die Doppel- $C_3$  aus den Koinzidenzpunkten der quadratischen Involution projizierenden Kegeln zweiter Ordnung gebildet wird. Für  $c = 0$  hat man wieder das Quadrat einer Involution:

$$(\lambda + \mu)^2 = 0,$$

d. h. eine doppelte windschiefe Regelschar zweiter Ordnung; und für  $c = -\frac{1}{3}$  die einzige irreduzible, einem (und nur einem) speziellen linearen Komplex angehörende  $R_4^{II}$  des Büschels, während die Tangentenfläche der Doppel- $C_3$  dem Werte  $c = \infty$  zugeordnet ist, so daß in der Tat die Aussagen unseres Satzes auch für das Flächenbüschel mit konjugiert-imaginären Dorsallinien zweiter Ordnung gelten.

Jede  $R_4^I$ , deren Erzeugende die Punkte ihrer Doppel- $C_3$  projektiv aufeinander beziehen, läßt sich auch erzeugen durch zwei projektiv aufeinander bezogene Kegelschnitte, insbesondere durch die beiden Kegelschnitte in den parabolischen Ebenen der Fläche. Die Schnittgerade dieser Ebenen ist gemeinsame Tangente der beiden Kegelschnitte und ihre Berührungspunkte liegen auf den beiden Dorsallinien (zweiter Ordnung).

Umgekehrt geben zwei Kegelschnitte  $k_1, k_2$  mit gemeinsamer Tangente und getrennten Berührungspunkten  $P_1 Q_2$ , die so projektiv aufeinander bezogen sind, daß dem Punkte  $P_1$  auf  $k_1$  der Berührungspunkt  $P_2$  der zweiten von  $P_1$  ausgehenden Tangente an  $k_2$ , und der Punkt  $Q_2$  auf  $k_2$  dem Berührungspunkte  $Q_1$  der zweiten von  $Q_2$  an  $k_1$  gehenden Tangente entspricht, zu  $\infty^1 R_4$  Veranlassung, deren kubische Doppelkurven sämtlich dasselbe Schmiegungstetraeder  $P_2 P_1 Q_1 Q_2$  haben.

Geht man von einer dieser kubischen Kurven mit  $P_2 P_1$  und  $Q_1 Q_2$  als Tangenten aus, etwa wie früher von (1):

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda^3 = \mu^3, \\ x_2 = \lambda^2 = \mu^2, \\ x_3 = \lambda = \mu, \\ x_4 = 1 = 1, \end{cases}$$

so muß sich einem Kegelschnitt  $k_1$  jedenfalls ein Kegelschnitt  $k_2$  derart zuordnen lassen, daß diese, passend projektiv aufeinander bezogen, eine  $R_4^f$  mit (1) als Doppel- $C_3$  ergeben. Sind die Gleichungen dieser Kegelschnitte  $k_1$  und  $k_2$ :

$$(34) \quad \begin{cases} x_1 = \gamma t_2^2, \\ x_2 = \beta t_1 t_2, \\ x_3 = \alpha t_1^2, \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad (35) \quad \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = \eta t_2^2, \\ y_3 = \varepsilon t_1 t_2, \\ y_4 = \delta t_1^2, \end{cases}$$

so hat man:

$$\begin{cases} p_{12} = \gamma \eta t_1^4, \\ p_{13} = \gamma \varepsilon t_1^3 t_2, \\ p_{14} = \gamma \delta t_1^2 t_2^2, \end{cases} \quad \begin{cases} p_{24} = \alpha \delta t_1^4, \\ p_{42} = -\beta \delta t_1^3 t_2, \\ p_{23} = (\beta \varepsilon - \alpha \eta) t_1^2 t_2^2. \end{cases}$$

Da aber jede  $R_4$  mit (1) als Doppelkurve und  $Q_1 Q_2$  und  $P_2 P_1$  als Dorsallinien zweiter Ordnung aus der Sehnen-Kongruenz von (1):

$$(3) \quad \begin{cases} p_{12} = t_2^3, \\ p_{13} = t_1 t_2, \\ p_{14} = t_1^3 - t_2 t_3, \end{cases} \quad \begin{cases} p_{24} = t_2^3, \\ p_{42} = -t_1 t_2, \\ p_{23} = t_2 t_3 \end{cases}$$

durch eine Gleichung der Form:

$$c t_1^3 + (d - 2c) t_2 t_3 = 0$$

ausgesondert wird, so daß, wenn man noch zur Abkürzung:

$$\frac{c}{2c-d} \equiv A$$

setzt, wegen

$$t_3 = A \frac{t_1^3}{t_2}$$

$$(36) \quad \begin{cases} p_{12} = t_2^3, \\ p_{13} = t_1 t_2, \\ p_{14} = (1-A) t_1^3 t_2^2, \end{cases} \quad \begin{cases} p_{24} = A^3 t_1^4, \\ p_{42} = -A t_1^3 t_2, \\ p_{23} = A t_1^2 t_2^2 \end{cases}$$

ist, so ergeben sich zur Berechnung von:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \eta$$

als Funktionen von  $A$  diese sechs Gleichungen:

$$(37) \quad \begin{cases} \gamma \eta = 1, \\ \gamma \varepsilon = 1, \\ \gamma \delta = 1 - A. \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \delta = A^3, \\ \beta \delta = A, \\ \beta \varepsilon - \alpha \eta = A. \end{cases}$$

Setzt man etwa  $\gamma = 1$ , so folgt:

$$\eta = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \delta = 1 - A,$$

$$\beta = \frac{A}{1-A}, \quad \alpha = \frac{A^2}{1-A},$$

so daß die Gleichung:

$$A = \beta\varepsilon - \alpha\eta = \frac{A}{1-A} - \frac{A^2}{1-A} = A \frac{1-A}{1-A}$$

identisch besteht. Man erhält somit:

$$(38) \quad \begin{cases} \alpha:\beta:\gamma = c^2:c(2c-d):(c-d)(2c-d), \\ \delta:\varepsilon:\eta = c-d:2c-d:2c-d. \end{cases}$$

Für  $c=d$  zerfällt jeder der beiden Kegelschnitte (34) und (35) in die allen Kegelschnitten der zugehörigen Schar gemeinsamen Tangentenpaare. Die den Kegelschnitten beider Scharen gemeinsame Tangente:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = ct_2, \\ x_3 = ct_1, \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = ct_2, \\ y_3 = ct_1, \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

wird Achse des speziellen linearen Komplexes, dem in diesem Falle die  $R_4$  (in Übereinstimmung mit unseren früheren Ergebnissen) angehört. Die Definition der Fläche durch die projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnitte  $k_1$  und  $k_2$  wird illusorisch; die Fläche besitzt überhaupt keine irreduziblen Kegelschnitte mehr.

Für das Büschel mit einer Dorsallinie vierter Ordnung läßt sich die Korrespondenzgleichung immer in der Form schreiben:

$$(39) \quad \lambda^2 \mu^2 + c(\lambda - \mu)^2 = 0,$$

wo also

$$a = 1, \quad b = , \quad d = -2c, \quad e = 0, \quad f = 0$$

ist. Die Bedingungen (III) sind erfüllt, während (II) und (I) bezüglich diese Gestalten annehmen:

$$(II''') \quad c^2 = 0,$$

$$(I''') \quad c^2 = 0.$$

Für  $c=0$  hat man einen doppelten Kegel zweiter Ordnung, der die kubische Kurve (1) aus dem Kuspidalpunkt vierter Ordnung der Flächen des Büschels projiziert. Für  $c=\infty$  ergibt sich die Tangentenfläche der kubischen Kurve. Andere singuläre Flächen gibt es nicht im Büschel. Die genannten singulären Flächen trennen die reellen

Flächen, deren reelle Erzeugende sich sämtlich auf zwei reelle Punkte der Doppelkurve (1) stützen, von denjenigen, deren nicht singuläre Erzeugende sämtlich ideale Sehnen der Doppel- $C_3$  sind, entsprechend den (gleichbedeutenden) Projektivitäten, in die die quadratische Involution (4) hier zerfällt:

$$\lambda \mu \pm i \sqrt{c} (\lambda - \mu) = 0.$$

## VI.

### Die automorphen Kollineationsgruppen der $R_4$ mit ausschließlich Dorsallinien gerader Ordnung.

Eine gewundene kubische Kurve, und mit ihr ihre Tangentenfläche, gestattet, wie jede rationale Normalkurve, eine mit der Gruppe der linearen Substitutionen des von ihr getragenen binären Gebietes holoeidrisch-isomorphe, also im Lieschen Sinne dreigliedrige, automorphe Kollineationsgruppe. Eingliedrige (nicht invariante) Untergruppen dieser Kollineationsgruppen werden durch alle die linearen Substitutionen des binären Gebietes induziert, die zwei getrennte oder zusammenfallende Elemente des Gebietes festlassen. Da nun einerseits das Doppelverhältnis von vier Elementen eine Invariante gegenüber linearer Substitution ist, und andererseits das Doppelverhältnis, das zwei einander in einer Projektivität entsprechende Elemente mit den getrennten Fixelementen bilden, für alle Elementpaare den gleichen für die Projektivität charakteristischen Wert hat, so gestatten jedenfalls die (speziellen)  $R_4$  mit zwei getrennten Dorsallinien zweiter Ordnung eine im Lieschen Sinne eingliedrige und zwar schon im Komplexen gemischte automorphe kontinuierliche Kollineations-Gruppe. Diese Gruppe wird gebildet von allen automorphen Kollineationen der kubischen Kurve (1), die die beiden auf ihr liegenden Kuspidalpunkte der Fläche in sich transformieren oder miteinander vertauschen. Die Transformationen der ersten Schar haben für sich Gruppeneigenschaft.

Schreiben wir die den  $R_4$  zugrunde liegenden Korrespondenzgleichungen wieder in der Form:

$$(25) \quad c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu = 0,$$

so lassen sich die gesuchten Gruppen leicht angeben. Alle linearen Substitutionen, die das Gebiet  $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ , bzw.  $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  in sich transformieren und dabei die Elemente  $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \mu_2 = 0$  unverändert lassen, haben, nicht-homogen geschrieben, die Form:

$$(40) \quad \lambda^* = B\lambda, \quad \mu^* = B\mu,$$

$$(41) \quad \lambda^* = \frac{C}{\lambda}, \quad \mu^* = \frac{C}{\mu}.$$

Aus (40) folgt:

$$\lambda^* + \mu^* = B(\lambda + \mu),$$

$$\lambda^* \mu^* = B^3 \cdot \lambda \mu,$$

mithin, falls man wie früher:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \quad \lambda + \mu : \lambda \mu : 1 = t_1 : t_2 : t_3 \\ \lambda^* + \mu^* : \lambda^* \mu^* : 1 = t_1^* : t_2^* : t_3^* \end{array} \right.$$

setzt:

$$(40^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1^* = B t_1, \\ t_2^* = B^3 t_2, \\ t_3^* = t_3, \end{array} \right.$$

$$(40^{**}) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{12}^* = B^4 p_{12}, \\ p_{13}^* = B^3 p_{13}, \\ p_{14}^* = B^3 p_{14}, \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} p_{24}^* = p_{24}, \\ p_{42}^* = B p_{42}, \\ p_{23}^* = B^3 p_{23}, \end{array} \right.$$

woraus sich wegen (1) die induzierte Kollineationsgruppe sofort in der Form:

$$(40^{***}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = B^3 x_1, \\ x_2^* = B^3 x_2, \\ x_3^* = B x_3, \\ x_4^* = x_4 \end{array} \right.$$

ergibt.

Aus (41) folgt:

$$\lambda^* + \mu^* = \frac{C(\lambda + \mu)}{\lambda \mu},$$

$$\lambda^* \mu^* = \frac{C^2}{\lambda \mu},$$

und hieraus:

$$(41^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1^* = C t_1, \\ t_2^* = C^3 t_2, \\ t_3^* = t_3, \end{array} \right.$$

$$(41^{**}) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{12}^* = C^4 p_{12}, \\ p_{13}^* = -C^3 p_{13}, \\ p_{14}^* = C^3 p_{14}, \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} p_{24}^* = p_{24}, \\ p_{42}^* = -C p_{42}, \\ p_{23}^* = C^3 p_{23}. \end{array} \right.$$

Die induzierte Schar von Kollineationen hat die Form:

$$(41^{***}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = C^3 x_1, \\ x_2^* = C^3 x_2, \\ x_3^* = C x_3, \\ x_4^* = x_4. \end{array} \right.$$

Man sieht unmittelbar, daß die Scharen (40) für sich, und (41) mit (40) zusammengenommen Gruppeneigenschaft haben. Die Gleichungen (40<sup>\*\*\*</sup>) und (41<sup>\*\*\*</sup>) stellen somit die beiden Scharen von Kollineationen dar, aus denen die automorphe eingliedrige Kollineationsgruppe der  $R_4$  mit zwei Dorsallinien zweiter Ordnung besteht.

Daß andere automorphe Kollineationen der  $R_4$  mit zwei getrennten Dorsallinien zweiter Ordnung nicht existieren, läßt sich leicht erweisen; wir wählen zu diesem Zwecke den Ansatz so, daß wir zugleich die endlichen Gleichungen der Gruppe, bezogen auf ein reelles Koordinatentetraeder, für den Fall konjugiert-komplexer Dorsallinien erhalten und, vor allem, die Gruppe der  $R_4$  mit einer Dorsallinie vierter Ordnung mitumfassen.

Zu diesem Zwecke gehen wir aus von der Korrespondenzgleichung der  $R_4$  in der Form:

$$(42) \quad \lambda^2 \mu^2 + c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu + f = 0,$$

wo

$$d = -2(c \pm \sqrt{f})$$

zu wählen,  $a=1$ ,  $b=0$  und  $e=0$  ist. Die Korrespondenz zerfällt in diesem Falle in die beiden (gleichbedeutenden) Projektivitäten:

$$(43) \quad \begin{cases} (\lambda\mu \mp \sqrt{f}) + i\sqrt{c}(\lambda - \mu) = 0, \\ (\lambda\mu \mp \sqrt{f}) - i\sqrt{c}(\lambda - \mu) = 0. \end{cases}$$

Sind  $c$  und  $f$  reell und ist  $f \geq 0$ , so haben wir *reelle* Flächen mit  $\infty^1$  reellen Erzeugenden. Ist  $f > 0$ , so sind die beiden Dorsallinien zweiter Ordnung getrennt und reell oder konjugiert-imaginär, je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen in den Gleichungen (43) wählt. Für  $f=0$  ergibt sich die Korrespondenzgleichung der  $R_4$  mit einer Dorsallinie vierter Ordnung: die bilinearen Korrespondenzen (43) werden *parabolisch*.

Um *alle* automorphen Kollineationen der zu den Korrespondenzgleichungen (42) bzw. (43) gehörigen  $R_4$  zu bestimmen, hat man alle linearen Substitutionen:

$$(44) \quad \lambda^* = \frac{a_1\lambda + a_2}{b_1\lambda + b_2}, \quad \mu^* = \frac{a_1\mu + a_2}{b_1\mu + b_2}$$

aufzusuchen, die die Gleichungen (43) entweder je in sich oder aber ineinander überführen. Setzt man die Werte von (44) in (43) ein, so erhält man, wenn man zur Abkürzung noch schreibt:

$$\pm \sqrt{f} \equiv \delta, \quad + i\sqrt{c} \equiv \gamma,$$

aus

$$(\lambda\mu - \delta) \pm \gamma(\lambda - \mu) = 0$$

$$(a_1^2 - \delta b_1^2)\lambda^*\mu^* + (a_2^2 - \delta b_2^2) + (a_1a_2 - \delta b_1b_2)(\lambda^* + \mu^*) \\ \pm \gamma[(a_1b_2 - a_2b_1)(\lambda^* - \mu^*)] = 0.$$

Es müssen also die folgenden drei Gleichungen erfüllt sein:

$$(45) \quad a_1 a_2 - \delta b_1 b_2 = 0,$$

$$(46) \quad a_1^2 - \delta b_1^2 = \frac{a_2^2 - \delta b_2^2}{-\delta}.$$

$$(47) \quad a_1^2 - \delta b_1^2 = \pm (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Aus (45) folgt:

$$(45^*) \quad \begin{cases} a_2 = \varrho b_1, \\ b_2 = \frac{\varrho}{\delta} a_1, \end{cases}$$

somit, wegen (46)

$$(46^*) \quad (a_1^2 - \delta b_1^2)(\delta^2 - \varrho^2) = 0$$

und wegen (47)

$$(47^*) \quad (a_1^2 - \delta b_1^2)(\delta \mp \varrho) = 0.$$

Unter der Voraussetzung:

$$(48) \quad a_1^2 - \delta b_1^2 \neq 0$$

ergibt sich hieraus:

$$\varrho = \pm \delta,$$

somit:

$$(49) \quad \boxed{a_2 = \pm \delta b_1, \quad b_2 = \pm a_1}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$-\frac{a_1}{b_1} \equiv D,$$

so nehmen die gesuchten Substitutionen (44) die Form an:

$$(44^*) \quad \lambda = \frac{-D\lambda^* \pm \delta}{\lambda^* \mp D}, \quad \mu = \frac{-D\mu^* \pm \delta}{\mu^* \mp D},$$

wo die Ungleichung (48) zum Ausdruck bringt, daß die Determinante der Substitutionen (44<sup>\*</sup>):

$$\Delta = \pm (D^2 - \delta)$$

nicht verschwinden darf. Schreibt man die Gleichungen (44<sup>\*</sup>) in der Form:

$$(44^{**}) \quad \lambda^* \lambda + D(\lambda^* \mp \lambda) \mp \delta = 0,$$

so erkennt man ohne weiteres die Übereinstimmung mit unseren begrifflichen Überlegungen im Anfang dieses Abschnittes. In der Tat haben die durch (44<sup>\*\*</sup>) dargestellten Projektivitäten bei Wahl der (zusammengehörigen) oberen Vorzeichen dieselben Fixpunkte wie die bilinearen Korrespondenzen (43); wählt man die unteren Vorzeichen, so erhält man involutorische Pro-



jektivitäten, die jene Fixpunkte miteinander vertauschen. *Andere nicht-  
ausgeartete automorphe Kollineationen der  $R_4$ , als die durch die genannten  
Substitutionen induzierten gibt es also nicht.*

Löst man die Gleichungen (44\*\*) nach  $\lambda^*$  auf, so erhält man:

$$(44^{***}) \quad \lambda^* = \pm \frac{D\lambda + \delta}{\lambda + D},$$

woraus sich leicht die endlichen Gleichungen der gesuchten Kollineationsgruppen ergeben:

$$(50) \quad \begin{cases} \pm x_1^* = E^3 x_1 + 3E^2 \delta x_2 + 3E \delta^2 x_3 + \delta^3 x_4, \\ x_2^* = E^3 x_1 + (E^3 + 2E\delta) x_2 + (\delta^3 + 2E^2 \delta) x_3 + E \delta^2 x_4, \\ \pm x_3^* = E x_1 + (2E^3 + \delta) x_2 + (2\delta E + E^3) x_3 + E^2 \delta x_4, \\ x_4^* = x_1 + 3E x_2 + 3E^2 x_3 + E^3 x_4. \end{cases}$$

In diesen Transformationsformeln (50) gelten die oberen Vorzeichen für die Kollineationen der Schar, die für sich Gruppeneigenschaft hat, die unteren für die Kollineationen, die die Punkte der Doppel- $C_3$  der  $R_4$  involutorisch untereinander vertauschen.

Ist  $f$  und damit  $\delta \equiv \pm \sqrt{f} = 0$ , so geben die Formeln (50) die automorphe Kollineationsgruppe der  $R_4$  mit einer Dorsallinie vierter Ordnung, die zu der Korrespondenzgleichung

$$(39) \quad \lambda^2 \mu^2 + c(\lambda - \mu)^2 = 0$$

gehört.

Da die Fixpunkte der gleichbedeutenden parabolischen Projektivitäten:

$$\lambda \mu \pm i \sqrt{c}(\lambda - \mu) = 0$$

zusammenfallen, können die Kollineationen (50) mit  $\delta = 0$  und den negativen Vorzeichen nicht mehr genau in der früheren Weise charakterisiert werden, da eine Vertauschung der zusammenfallenden Fixpunkte keinen Sinn hat. Die Kollineationen der ersten Schar, mit den oberen positiven Vorzeichen in den Formeln (50), die für sich Gruppeneigenschaft hat, transformieren die Punkte der Doppel- $C_3$  (1) parabolisch und zwar ist für alle der Kuspidalpunkt vierter Ordnung der  $R_4$  ( $\lambda = 0$ ;  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ) Fixpunkt. Die Kollineationen der zweiten Schar hingegen, mit den unteren negativen Vorzeichen in (50), die keine Gruppe für sich bilden, werden durch alle die automorphen projektiven Transformationen der Doppel- $C_3$  induziert, die ihre Punkte (wie im allgemeinen Fall) involutorisch transformieren, und für die der eine der beiden, hier getrennten, Fixpunkte in dem Kuspidalpunkt der  $R_4$  liegt, während der andere die ganze Kurve (1) durchläuft:

$$\lambda^* = \lambda = 0; \quad \lambda^* = \lambda = -2D.$$

Daß die Kollineationen (50) auch im Falle  $\delta = 0$  wirklich eine Gruppe bilden, ist auf Grund des allgemeinen Ansatzes selbstverständlich, folgt aber auch unmittelbar aus der Tatsache, daß das Produkt zweier beliebiger (verschiedener) involutorischer Projektivitäten mit einem gemeinsamen Fixpunkt:

$$\lambda^* = -\frac{D\lambda}{\lambda + D} \quad \text{und} \quad \lambda^{**} = -\frac{E\lambda^*}{\lambda^* + E}$$

( $D \neq 0, E \neq 0$ ) eine *parabolische* Projektivität mit demselben Fixpunkt  $\lambda = 0$  ist:

$$\lambda^{**} = -\frac{\frac{E-D\lambda}{\lambda+D}}{-\frac{D\lambda}{\lambda+D}+E} = \frac{\frac{ED}{E-D} \cdot \lambda}{\lambda + \frac{ED}{E-D}}$$

Die Kollineationen der automorphen Gruppe (50) lassen *jede* Fläche des Büschels von  $R_4$ , die dieselbe gewundene  $C_3$  (1) zur Doppelkurve und dieselben geraden Linien, Tangenten der  $C_3$ , zu Dorsallinien gerader Ordnung haben, die also durch die Korrespondenzgleichung (42) mit *variablem*  $c$  definiert sind:

$$(42^*) \quad [(x_1x_2 - x_3^2) \mp \sqrt{f}(x_1x_4 - x_2^2)]^2 + c[(x_1x_4 - x_2x_3)^2 - 4(x_1x_2 - x_3^2)(x_2x_4 - x_3^2)] = 0$$

einzel<sup>n</sup> stehen. Die Kollineationen, die der Schar mit den oberen positiven Vorzeichen in (50) angehören, haben vier diskrete oder sämtlich am Kuspidalpunkt vierter Ordnung (bei der Fläche mit  $f=0$ ) zusammengewürkte Fixpunkte, während die involutorischen Kollineationen (50), die die Schar mit den unteren, negativen Vorzeichen bilden, „windschiefe Perspektiven“ sind.

Die  $R_4$  mit irreduzibler Doppel- $C_3$  und ausschließlich Dorsallinien gerader Ordnung sind hinsichtlich  $\infty^1$  Achsenpaaren „geschart-invariant“.

Die Achsen dieser geschart-involutorischen Kollineationen bilden im Falle der  $R_4$  mit zwei getrennten Dorsallinien zweiter Ordnung eine windschiefe Fläche vierter Ordnung mit einer dreifachen und einer einfachen Leitgeraden, die ihrerseits (nur) zwei Dorsallinien zweiter Ordnung besitzt und eine schon im Komplexen gemischte zweigliedrige automorphe Kollineationsgruppe interessanter Zusammensetzung gestattet. Ihre Haupttangentenkurven<sup>16)</sup> werden durch die  $R_4$  des Büschels (42\*) ausgeschnitten.

<sup>16)</sup> Sie sind sämtlich algebraisch und reduzibel hinsichtlich der linearen Komplexe, die durch die windschiefe Fläche hindurchgehen. Jede besteht aus einem Paar von gewundenen Kurven dritter Ordnung und jede  $R_4$  des Büschels (42\*) schneidet ein Paar solcher Kurven aus, die jedoch niemals einem und demselben linearen Komplex angehören.

Die Achsenfläche der windschiefen Perspektiven, die die  $R_4$  mit einer Dorsallinie vierter Ordnung in sich überführen, ist *reduzibel*. Sie besteht aus einem Strahlenbüschel und einer Cayleyschen Fläche dritter Ordnung, die bekanntlich eine *dreigliedrige* kontinuierliche automorphe Kollineationsgruppe gestattet. Ein näheres Eingehen auf diese Verhältnisse sowie eine Diskussion der *reellen* Scharen der besprochenen Gruppen und ihre geometrische Charakterisierung würde hier zu weit führen. Wir hoffen bei anderer Gelegenheit darauf zurückkommen zu können und schließen mit der Bemerkung, daß die  $R_4$  mit *ausschließlich Dorsallinien gerader Ordnung die einzigen  $R_4$  mit irreduzibler kubischer Doppelkurve sind, die eine kontinuierliche automorphe Kollineationsgruppe gestatten.*

Hannover, den 4. April 1922.

(Eingegangen am 6. 4. 1922.)

# Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex.

Von

Julius v. Sz. Nagy in Klausenburg.

## Einleitung.

Die *Realitätsordnung* bzw. der *Index* einer reellen ebenen Kurve ist die höchste bzw. geringste Anzahl (einfacher) reeller Punkte, in denen die Kurve von einer beliebigen Geraden geschnitten wird. Demgemäß versteht man unter der *Realitätsklasse* bzw. dem *Klassenindex* einer ebenen Kurve die größte bzw. kleinste Anzahl der (reellen) Tangenten der Kurve, die von einem beliebigen Punkte der Ebene ausgehen. In der vorliegenden Arbeit benützen wir statt der Realitätsordnung und Realitätsklasse die kürzere Benennung *Ordnung* bzw. *Klasse* und wenden für die übliche *Ordnung* und *Klasse* einer algebraischen Kurve die Benennung *algebraische Ordnung* bzw. *Klasse* an<sup>1)</sup>.

Unter einer *Kurve* verstehen wir eine reelle, stetige und geschlossene Kurve, die in jedem Punkte eine bestimmte, mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente hat. Diese Kurve hat keine Geradenstücke und keine Winkelpunkte. Die Züge dieser Kurve sind von Punkten und Geraden verschieden<sup>2)</sup>.

Über den Begriff *Index* erschienen in den letzten Jahren mehrere Arbeiten. Die vor 1915 erschienenen Arbeiten von Ch. A. Scott<sup>3)</sup> und P. Field<sup>4)</sup>, habe ich in einer früheren diesbezüglichen Abhandlung<sup>5)</sup> zitiert.

<sup>1)</sup> Man kann den *Index* und den *Klassenindex* für Raumkurven entsprechend definieren.

<sup>2)</sup> Aus unseren Resultaten als Grenzfälle folgen auch Sätze für solche Kurven, die auch Punkt- oder Geradenzüge haben.

<sup>3)</sup> Scott, Ch. A.: On the Circuits of plane Curves. Transactions of the Amer. Math. Society 3 (1902), S. 328—338.

<sup>4)</sup> Field, P.: On the Circuits of a plane Curve. I. Mitt. Math. Ann. 67, S. 126—129; II. Mitt. ebenda 69, S. 218—222.

<sup>5)</sup> Nagy, J. v. Sz.: Über die reellen Züge algebraischer ebener und Raumkurven. Math. Ann. 77 (1916), S. 416—429.

In dieser Arbeit habe ich den Indexbegriff auch für die algebraischen Raumkurven definiert und angewandt. Im Anschluß an meine Arbeit sind drei diesbezügliche Mitteilungen von H. Mohrmann erschienen<sup>6)</sup>. Außer diesen drei Abhandlungen von H. Mohrmann ist bis Ende des Jahres 1918 — meines Wissens — nur eine diesbezügliche Arbeit und zwar von C. Juel<sup>7)</sup> erschienen. Die Arbeiten von H. Mohrmann und C. Juel beschäftigen sich mit algebraischen und nichtalgebraischen Kurven vom Maximalindex. Vorher war von nichtalgebraischen Kurven vom Maximalindex keine Rede.

Vom Ende des Jahres 1918 ab sind mir — infolge der schwierigen Verhältnisse — überhaupt keine diesbezüglichen neueren mathematischen Abhandlungen bekannt geworden. Unsere wichtigsten Resultate lagen schon Mitte des Jahres 1919 fertig vor.

In den bisherigen Arbeiten waren nur die Kurven vom Maximalindex ( $n$ -ter Ordnung vom Index  $n - 2$ ) die Gegenstände der Untersuchung, die Kurven vom Maximal-Klassenindex ( $n$ -ter Klasse vom Klassenindex  $n - 2$ ) kommen erst in dieser gegenwärtigen Arbeit vor.

Eines von unseren wichtigsten Resultaten ist das, daß man mit einer einfachen Konstruktion (aus einer endlichen Anzahl von ganz im Endlichen liegenden Elementarbögen) Kurven vom Maximal-Klassenindex darstellen kann, welche die verschiedensten allgemeinen Eigenschaften haben.

Die Polarfiguren dieser Kurven in bezug auf einen Kegelschnitt ergeben die verschiedensten allgemeinen Typen der Kurven vom Maximalindex.

So ist es mir gelungen zu bemerken, daß es auch Kurven vom Maximalindex gibt, deren Index größer als die Summe der Indizes ihrer Züge ist. Man hatte bisher von solchen Kurven keine Ahnung, im Gegenteil ist ein Satz von H. Mohrmann eben deshalb unrichtig, weil auch Kurven von den genannten Eigenschaften existieren<sup>8)</sup>.

Die Einführung der Kurven vom Maximal-Klassenindex ist nicht nur deshalb zweckmäßig, weil damit die Darstellung der Kurven vom Maximal-

<sup>6)</sup> Mohrmann, H.: Gewundene Kurven vom Maximalindex, Gött. Nachr. 1916, S. 197–198; Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularität, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1916, S. 201–208; Über algebraische und nichtalgebraische gewundene Kurven  $n$ -ter Ordnung vom Maximalindex, Math. Ann. 78 (1917), S. 171–176.

<sup>7)</sup> Juel, C.: Die gewundenen Kurven vom Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og math. Afd., 8. Række, II. 5., S. 279–294.

<sup>8)</sup> Der Satz 4 in der dritten Abhandlung von H. Mohrmann (Math. Ann. 78).

index erleichtert wird, sondern auch deshalb, weil man aus den Kurven vom Maximal-Klassenindex ausgehend einfache Sätze für die Reduzibilität und Irreduzibilität (im Sinne der Realität) solcher Kurven ableiten kann<sup>9)</sup>.

## Erstes Kapitel.

### Die Darstellung ebener Kurven vom Maximal-Klassenindex.

#### 1. Der Elementarbogen.

Wir werden ebene Kurven vom Maximal-Klassenindex aus Elementarbögen konstruieren, deshalb fassen wir hier die wichtigsten Eigenschaften der Elementarbögen zusammen<sup>10)</sup>.

Unter einem im Endlichen liegenden Elementarbogen  $A_1A_2$  werden wir einen solchen stetigen Kurvenbogen verstehen, der in jedem Punkte eine bestimmte mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente hat und mit dem endlichen Geradenstück  $\overline{A_1A_2}$  zusammen, vom dem der Bogen nicht berührt wird, die vollständige Begrenzung eines konvexen Gebietes  $T$  bildet. Von diesem Gebiete  $T$  sagen wir, daß es zu dem Elementarbogen gehört.

Aus der Definition des Elementarbogens folgt, daß er mit keiner Gerade mehr als zwei gemeinsame Punkte, daß er keinen Winkelpunkt, keinen mehrfachen Punkt und kein Geradenstück hat.

Nennen wir (nach Minkowski) eine solche durch mindestens einen Punkt des Bereiches  $T$  hindurchgehende und in seiner Ebene liegende Gerade, die den ganzen Bereich  $T$  ganz auf einer Seite läßt, eine Stützgerade, so folgt aus den Eigenschaften des konvexen Gebietes, daß durch einen inneren Punkt des konvexen Gebietes  $T$  keine Stützgerade geht und daß aus jedem Punkte  $P$  außerhalb des Gebietes  $T$  immer zwei Stützgeraden gehen.

Die Stützgeraden des Gebietes sind entweder Tangenten des Elementarbogens  $A_1A_2$ , oder nicht. In letzterem Falle gehen die Stützgeraden ent-

<sup>9)</sup> Eine Kurve  $n$ -ter Klasse (Ordnung), die aus wenigstens zwei Zügen besteht, wird dann in Betracht der Realität als reduzibel zu bezeichnen sein, wenn ihre Züge sich in zwei oder mehrere Kurven so teilen lassen, daß die Summe der Klassen (Ordnungen) dieser Kurven gleich der Klasse (Ordnung) der Kurve ist. Die Definition der Irreduzibilität und Reduzibilität reeller Kurven kommt erst in einer Fußnote der dritten Abhandlung von Herrn H. Mohrmann (Math. Ann., S. 172) vor.

<sup>10)</sup> Vgl. die vortreffliche Arbeit von Herrn C. Juel: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Raekke (1914), S. 113—166, Naturv. og math. Afd. XI. 2.

weder durch einen oder durch beide der Endpunkte  $A_1$  und  $A_2$  des Elementarbogens und schneiden den Elementarbogen in keinem von seinen Endpunkten verschiedenen Punkte.

Wir erhalten die aus einem Punkte  $P$  ausgehenden Tangenten des Elementarbogens  $A_1A_2$ , wenn wir von den aus dem Punkte  $P$  ausgehenden Stützgeraden des Gebietes  $T$  die Geraden, welche den Elementarbogen nicht berühren, wegnehmen.

Aus diesem Grunde können wir den folgenden Satz aufstellen:

1. *Durch die inneren Punkte des konvexen Gebietes  $T$  gehen keine Tangenten des Elementarbogens, durch einen Punkt außerhalb des Bereiches  $T$  gehen 2, 1 oder 0 Tangenten des Elementarbogens, je nachdem die beiden Geraden  $PA_1$ ,  $PA_2$  oder nur 1 oder keine von ihnen mit dem Elementarbogen außer den Endpunkten  $A_1A_2$  noch einen weiteren Punkt gemein haben. Durch jeden Punkt  $P$  der Geraden  $A_1A_2$ , welcher nicht auf dem Geradenstück  $\overline{A_1A_2}$  liegt, geht eine und nur eine Tangente an den Bogen.*

Es ist leicht zu bemerken, daß die Punkte des Elementarbogens  $A_1A_2$  in bezug auf die Tangenten zu den außerhalb des Gebietes  $T$  liegenden Punkten, die Punkte des Geradenstückes  $\overline{A_1A_2}$  zu den Punkten des konvexen Bereiches  $T$  zu rechnen sind.

Ein Elementarbogen hat zwei Seiten; diejenige, die von den Punkten des zugehörigen konvexen Bereiches erreichbar ist, nennen wir die konkave Seite des Bogens, die andere die konvexe.

Über den Elementarbogen benötigen wir noch die folgenden Sätze:

Wenn der Punkt  $P$  sich auf der Ebene bewegt, so ändert sich nur dann die Anzahl der aus ihm an den Elementarbogen  $A_1A_2$  gehenden Tangenten, wenn der Punkt entweder den Bogen oder die Tangente eines Endpunktes überschreitet. Wenn der Punkt  $P$  den Elementarbogen von der konkaven bzw. konvexen Seite aus in seinem inneren Punkte überschreitet, so nimmt die Anzahl der aus dem Punkte  $P$  an den Bogen ausgehenden Tangenten zu bzw. ab. Die Veränderung ist in beiden Fällen 2. Überschreitet der Punkt  $P$  die eine Endtangente des Elementarbogens, so ist die Veränderung der Anzahl der aus  $P$  an den Bogen gehenden Tangenten 1. Die Veränderung ist Zunahme, wenn der Punkt in denjenigen von der Endtangente und der Geraden  $\overline{A_1A_2}$  gebildeten Winkelraum kommt, der den Elementarbogen in sich enthält. Widrigenfalls ist die Veränderung Abnahme.

Die Geraden, die durch einen Endpunkt des Elementarbogens hindurchgehen, schneiden nur dann den Elementarbogen noch in einem Punkte,



wenn sie in demjenigen von der entsprechenden Endtangente und der Geraden  $A_1 A_n$  gebildeten Winkelraum liegen, der den Bogen in sich enthält.

## 2. Konkaves Bogenpolygon.

Wir werden jetzt zur Darstellung der Kurven vom Maximal-Klassenindex übergehen, die aus Elementarbögen zusammengesetzt sind.

Man beschreibe im Innern eines geradlinigen konvexen Polygons  $P_n$  über jeder Seite einen — aus den Endpunkten der Seite ausgehenden Elementarbogen so, daß zwei Elementarbögen über benachbarten Seiten in dem gemeinsamen Endpunkte einander berühren und je zwei Elementarbögen — einen etwa gemeinsamen Endpunkt ausgenommen — keine gemeinsamen Punkte haben. Wir werden im folgenden die aus  $n$  Elementarbögen zusammengesetzte Kurve ein  *$n$ -seitiges konkaves Bogenpolygon* nennen und mit  $K_n$  bezeichnen. Die  $n$  Elementarbögen, von denen das Bogenpolygon gebildet ist, werden die *Seiten* des Bogenpolygons genannt.

Für ein konkaves Bogenpolygon gilt der folgende Satz:

2. *Ein  $n$ -seitiges konkaves Bogenpolygon ist eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex. An eine solche Kurve gehen aus einem Punkte  $n$  bzw.  $n - 2$  Tangenten, je nachdem der Punkt auf dem Bogenpolygone oder im Inneren bzw. im Äußeren des Bogenpolygons liegt.*

Zum Beweis dieses Satzes nehmen wir im Innern des konkaven Bogenpolygons einen beliebigen Punkt  $P$  an und verbinden ihn durch Geraden mit den Spitzen des Bogenpolygons  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Dann ist klar, daß der Punkt  $P$  außerhalb der  $n$  konvexen Gebiete liegt, die zu den  $n$  Seiten als Elementarbögen zugehören; ferner ist klar, daß die Gerade  $PA_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) entweder die Tangente der Spitze  $A_i$  ist, in welchem Falle man sie für die Kurve  $K_n$  als eine einfache Tangente rechnet, oder nicht. In diesem Falle schneidet die Gerade  $PA_i$  einen und nur einen der beiden von dem Endpunkte  $A_i$  ausgehenden Elementarbögen (Seiten des Bogenpolygons) noch in einem Punkte. Daraus folgt auf Grund des Satzes 1, daß eben  $n$  Tangenten zur Kurve  $K_n$  aus dem Punkte  $P$  ausgehen.

Liegt der Punkt  $P$  außerhalb des Innern des Bogenpolygons  $K_n$ , so fällt er entweder noch in das Innere des geradlinigen Polygons  $P_n$  oder liegt außerhalb  $P_n$ .

Im ersten Falle liegt der Punkt  $P$  im Innern eines (und nur eines) zu einer Seite des Bogenpolygons  $A_k A_{k+1}$  ( $A_{n+1} = A_1$ ) gehörigen konvexen Gebietes. Aus dem Punkte  $P$  gehen also keine Tangenten zum Elementarbogen  $A_k A_{k+1}$ , obgleich der Bogen von den Geraden  $PA_k$  und  $PA_{k+1}$  noch in anderen Punkten als den Endpunkten geschnitten wird. Die Gerade



$PA_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ist auch jetzt entweder Tangente der Spitze  $A_i$  oder schneidet außer in  $A_i$  eine und nur eine der beiden Seiten des Bogenpolygons mit dem Endpunkte  $A_i$ . Daraus folgt, weil die Geraden  $PA_k$  und  $PA_{k+1}$  zu keinen Tangenten führen, daß aus einem Punkte  $P$ , der zwischen dem Bogenpolygon  $K_n$  und dem geradlinigen Polygon  $P_n$  liegt, zur Kurve  $K_n$   $n - 2$  Tangenten gehen.

In dem zweiten Falle, wenn der Punkt  $P$  außerhalb  $P_n$  liegt, gehen zwei Stützgeraden aus dem Punkte  $P$  zu dem geradlinigen Polygon  $P_n$ . Eine Stützgerade geht entweder nur durch eine Ecke  $A_k$  des Polygons  $P_n$ , in welchem Falle die Gerade  $PA_k$  außer  $A_k$  keine der aus  $A_k$  ausgehenden Seiten des Bogenpolygons schneidet oder durch eine Seite  $\overline{A_k A_{k+1}}$  des geradlinigen Polygons. In dem letzten Falle schneidet die Gerade  $PA_k \equiv PA_{k+1}$  außer  $A_k$  und  $A_{k+1}$  keine der aus den Punkten  $A_k$  und  $A_{k+1}$  ausgehenden drei Seiten des Bogenpolygons  $K_n$ . Weil der Punkt  $P$  außerhalb des Geradenstückes  $\overline{A_k A_{k+1}}$  liegt, geht eine Tangente aus  $P$  an die Seite  $A_k A_{k+1}$  des Bogenpolygons. Man kann die Gerade  $PA_k$  als Grenzfall einer solchen Geraden betrachten, von der keine der aus  $A_k$  ausgehenden Seiten des Bogenpolygons außer in  $A_k$  geschnitten wird, die Gerade  $PA_{k+1}$  als Grenzfall einer solchen Geraden, von der die Seite  $A_k A_{k+1}$  des Bogenpolygons noch in einem Punkte außer  $A_{k+1}$  geschnitten wird, während  $A_{k+1} A_{k+2}$  keinen solchen Schnittpunkt mehr hat. Somit ist die zweite Möglichkeit auf die erste zurückführbar.

Weil jede der  $n - 2$  Geraden  $PA_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), die nicht Stützgeraden sind, durch die entsprechende Ecke  $A_i$  in das Innere des Polygons  $P_n$  eindringt und dort außer der Ecke  $A_i$  eine und nur eine der aus  $A_i$  ausgehenden Seiten des Bogenpolygons schneidet, gehen aus den außerhalb  $P_n$  liegenden Punkten  $n - 2$  Tangenten an das Bogenpolygon.

Es ist leicht zu verstehen, daß aus einem Punkte  $P$ , der auf dem Bogenpolygon liegt,  $n$  Tangenten (die Tangente im Punkte  $P$  zweimal gerechnet) an die Kurve  $K_n$  gehen, ferner, daß aus den Punkten, die auf dem Polygon  $P_n$  liegen (die Ecken abgerechnet)  $n - 2$  Tangenten an das Bogenpolygon gehen.

### 3. Konkaves Bogenpolygon.

Wir ziehen im Äußeren eines geradlinigen konvexen Polygons  $P_n$  über jeder Seite einen aus den Endpunkten der Seite ausgehenden Elementarbogen so, daß zwei benachbarte Elementarbögen (über zwei benachbarten Seiten des Polygons  $P_n$ ) in dem gemeinsamen Endpunkte einander berühren und je zwei Elementarbögen — einen etwa gemeinsamen Endpunkt ausgenommen — keine gemeinsamen Punkte haben. Wir werden im folgenden eine aus Elementarbögen so konstruierte Kurve ein  $n$ -seitiges

*konvexes Bogenpolygon* nennen und mit  $V_n$  bezeichnen. Die  $n$  Elementarbögen, aus denen das Bogenpolygon zusammengesetzt ist, werden die Seiten des Bogenpolygons genannt.

Aus der Darstellung des konvexen Bogenpolygons ist klar, daß es eine stetige und geschlossene Kurve ist, die in jedem Punkte eine mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente hat, und daß diese Kurve außer den  $n$  Spitzen und außer Doppeltangenten keine Punkt- und Tangentensingularität hat, und endlich, daß ein  $n$ -seitiges konvexes Bogenpolygon für jede ganze Zahl  $n \geq 3$  konstruierbar ist.

Wir können aber das konvexe Bogenpolygon  $V_n$  auch für die Fälle  $n = 0, 1$  und  $2$  definieren, in welchen Fällen es eine solche geschlossene Kurve darstellt, die außer  $0, 1$  bzw.  $2$  Spitzen und außer Doppeltangenten keine andere Punkt- und Tangentensingularität hat.

Das konvexe Bogenpolygon  $V_0$  ist ein im Endlichen liegendes Oval, d. h. eine stetige geschlossene Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Die Kurve  $V_1$  ist eine im Endlichen liegende Kurve vierter Ordnung und dritter Klasse, die eine Spitze und eine Doppeltangente hat. Diese Kurve wird durch ihre Spitzentangente in zwei solche Bögen zerlegt, die nur deshalb nicht Elementarbögen sind, weil die Spitzentangente jeden der beiden Bögen in drei und nicht zwei Punkten schneidet, da sie jeden Bogen in einem Endpunkte berührt. Beide Bögen werden Elementarbögen, wenn man statt des einen Endpunktes einen damit benachbarten Punkt als Endpunkt nimmt. Die Kurve ist übrigens auch auf die folgende Weise darstellbar:

Wir nehmen auf einem Geradenstücke drei aufeinander folgende Punkte  $A_1, A_2, A_3$  an. Wir beschreiben auf der einen Seite der Geraden über  $A_1, A_2$  und  $A_2, A_3$  zwei im Punkte  $A_2$  sich berührende Elementarbögen  $A_1, A_2$  und  $A_2, A_3$ , und auf der anderen Seite der Geraden einen Elementarbogen  $A_1, A_3$  der im Punkte  $A_1$  bzw.  $A_3$  mit dem Elementarbogen  $A_1, A_2$  bzw.  $A_2, A_3$  gemeinsame Endtangenten hat.

Das konvexe Bogenpolygon  $V_2$  ist eine im Endlichen liegende Kurve sechster Ordnung und vierter Klasse, die 2 Spitzen und 3 Doppeltangenten hat. Haben die Spitzen eine gemeinsame Spitzentangente, so wird die Kurve dadurch in zwei Bögen zerlegt, die außer ihren Endpunkten oder wenigstens außer einem der beiden Endpunkte Elementarbögen sind.

Nehmen wir auf einem Geradenstücke vier aufeinander folgende Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$  und auf der einen Seite der Geraden über  $A_1, A_2, A_2, A_3$  und  $A_3, A_4$  drei Elementarbögen, von denen die ersten zwei in dem Punkte  $A_2$ , die letzten zwei in  $A_3$  sich berühren, und nehmen wir endlich auf der anderen Seite der Geraden einen Elementarbogen  $A_1, A_4$ , der im

Punkte  $A_1$  bzw.  $A_4$  mit dem Elementarbogen  $A_1A_2$  bzw.  $A_3A_4$  gemeinsame Endtangente hat, so erhalten wir ein konvexes Bogenpolygon  $V_2$ .

Wenn die Endtangente des Elementarbogens  $A_2A_3$  im Punkte  $A_2$  bzw.  $A_3$  sich der Richtung der Gerade  $A_1A_2$  bzw.  $A_3A_4$  nähert, während der Punkt  $A_2$  bzw.  $A_3$  sich dem Punkte  $A_1$  bzw.  $A_4$  nähert, so bekommen wir aus einer allgen. l. inen Kurve  $V_2$  als Grenzfall eine solche Kurve  $V_2$ , deren zwei Spitzen eine gemeinsame Tangente haben.

Wir können die Kurven  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  einheitlich auf die folgende Weise konstruieren:

Wir beschreiben über den Seiten eines Dreiecks außerhalb des Dreiecks je einen Elementarbogen so, daß die daraus zusammengesetzte Kurve in 3, 2, 1 bzw. 0 Ecken des Dreiecks je einen gewöhnlichen Punkt und in den übrigen 0, 1, 2 bzw. 3 Ecken je eine Spitze hat.

Für ein konvexes Bogenpolygon gilt der folgende Satz:

3. *Ein  $n$ -seitiges Bogenpolygon ist eine Kurve  $n+2$ -ter Klasse und vom Maximal-Klassenindex. Aus einem Punkte  $P$  gehen zu ihr  $n$  bzw.  $n+2$  Tangenten, je nachdem der Punkt  $P$  im Innern bzw. im Außern des Bogenpolygons oder auf dem Bogenpolygone liegt.*

Wir beweisen diesen Satz erst für  $n \geq 3$ .

Nehmen wir im Innern des Polygons  $P_n$  einen beliebigen Punkt an und verbinden wir ihn durch Geraden mit den Ecken (Spitzen des Bogenpolygons), so gehen aus dem Punkte  $P$   $n$  Tangenten an die Kurve  $V_n$ , weil der Punkt  $P$  in keinem zu einer Seite des Bogenpolygons gehörigen konvexen Bereiche liegt und die Gerade  $PA_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) außer dem Endpunkt  $A_i$  nur einen der aus  $A_i$  ausgehenden beiden Elementarbögen schneidet.

Liegt der Punkt  $P$  außerhalb des Polygons  $P_n$ , so gehen aus ihm zwei Stützgeraden an  $P_n$ . Wir können annehmen, daß eine Stützgerade nur durch eine Ecke des Polygons  $P_n$  hindurchgeht, weil der andere Fall, wo eine oder mehrere Seiten des Polygons in die eine Stützgerade fallen, auf den ersten Fall zurückführbar ist. Ist die Gerade  $PA_h$  eine Stützgerade des Polygons  $P_n$ , so schneidet sie beide von  $A_h$  ausgehende Seiten des Bogenpolygons  $V_n$  außer in  $A_h$  noch in einem anderen Punkt, weil die  $PA_h$  für die beiden Elementarbögen in demjenigen (von der Endtangente in  $A_h$  und der die zwei Endpunkte verbindenden Geraden gebildeten) Winkelraume liegt, der den betreffenden Elementarbogen in sich enthält.

Eine von den Stützgeraden verschiedene Gerade  $PA_i$  schneidet das Polygon  $P_n$  und damit eine und nur eine Seite des Bogenpolygons mit dem Endpunkte  $A_i$ .

Auf Grund des Satzes 1 können wir behaupten, daß aus einem Punkte  $P$ , der außerhalb  $P_n$  liegt,  $n+2$  bzw.  $n$  Tangenten an das Bogenpolygon  $V_n$  gehen, je nachdem der Punkt  $P$  außerhalb bzw. im Innern des Bogenpolygons  $V$  liegt. Da die Erledigung der Grenzlagen des Punktes  $P$  keine Schwierigkeiten verursacht, können wir den Satz 3 für jede ganze Zahl  $n \geq 3$  als völlig bewiesen betrachten.

Weil weder das konkave noch das konvexe  $n$ -seitige Bogenpolygon Wendetangenten und stationäre Tangenten hat, ändert sich die Anzahl der Tangenten, die aus einem Punkte an das Bogenpolygon gehen, dann und nur dann, wenn der Punkt das Bogenpolygon durchschreitet. Daraus folgt, daß es genügend gewesen wäre zu beweisen, daß man aus einem Punkte, der im Innern des Bogenpolygons  $K_n$  bzw.  $V_n$  liegt, an die entsprechende Kurve  $n$  Tangenten ziehen kann. Man kann nämlich aus dem Innern des Bogenpolygons  $K_n$  bzw.  $V_n$  nur hinauskommen, wenn man einen Elementarbogen von seiner konvexen Seite nach seiner konkaven bzw. umgekehrt überschreitet. Die Anzahl der Tangenten an die Kurve  $K_n$  bzw.  $V_n$  aus einem Punkte, der außerhalb des Bogenpolygons  $K_n$  bzw.  $V_n$  liegt, ist also  $n-2$  bzw.  $n+2$ .

Auf Grund dessen kann man den Satz 3, der für das Bogenpolygon  $V_0$  bekannt ist, auch auf  $V_1$  und  $V_2$  ohne weiteres übertragen.

#### 4. Algebraische Bogenpolygone. Bemerkungen.

Auf die Frage, ob es auch *algebraische* Kurven gibt, die Bogenpolygone darstellen, gibt der folgende Satz Antwort:

4. *Es gibt für alle  $n \geq 0$  solche algebraische Kurven  $n+2$ -ter Klasse, welche  $n$ -seitige konvexe Bogenpolygone darstellen, und es gibt für jede ganze Zahl  $n \geq 0$  algebraische Kurven  $n$ -ter Klasse, durch die  $n$ -seitige konkave Bogenpolygone dargestellt werden.*

Es gibt algebraische Bogenpolygone auch unter den Epi- und Hypozykloiden, die — wie bekannt — von einem Punkte des Randes eines auf einem Kreise rollenden Kreises beschrieben werden. Wir erhalten Epizykloiden, wenn die zwei Kreise außeinander liegen und Hypozykloiden, wenn der eine Kreis sich innerhalb des anderen befindet.

Ein Kreis oder eine Ellipse stellt eine Kurve  $V_0$  dar. Eine solche Epi- bzw. Hypozykloide, für welche der Radius des rollenden Kreises  $n$ -mal kleiner ist, als derjenige des unbeweglichen, ist ein  $n$ -seitiges konvexes bzw. konkaves Bogenpolygon  $V_n$  ( $n \geq 0$ ) bzw.  $K_n$  ( $n \geq 3$ ).

Die Spitzen eines solchen  $n$ -seitigen Bogenpolygons teilen den Umfang des unbeweglichen Kreises in  $n$  gleiche Teile und die  $n$  Spitzentangenten gehen durch den Mittelpunkt dieses Kreises.

Die so dargestellten Bogenpolygone sind algebraisch, weil eine Hypo- oder Epizykloide, für welche das Verhältnis der Radien der beiden Kreise rational ist, algebraisch ist.

Über die Bogenpolygone wollen wir hier noch folgendes bemerken:

Mehrere Seiten des geradlinigen konvexen Polygons  $P_n$ , die wir zur Darstellung der Bogenpolygone angewendet haben, können in eine Gerade fallen. Das Polygon  $P_n$  kann im äußersten Falle bei  $V_n$  in eine Gerade und bei  $K_n$  in ein Dreieck übergehen.

Man kann ein Bogenpolygon von jedem Typus aus lauter Kreisbögen darstellen.

Die Ebene wird durch ein Bogenpolygon in zwei in sich zusammenhängende Gebiete zerlegt. Positives Gebiet nennen wir dasjenige, aus dessen Punkten die konvexen Seiten der Elementarbögen (Seiten) des Bogenpolygons erreichbar sind, das andere ist das negative Gebiet. Nach dieser Benennung ist also das innere (im Endlichen liegende) Gebiet für konvexe Bogenpolygone negativ, für konkave Bogenpolygone positiv.

Die Anzahl der Tangenten, die aus den Punkten des positiven Gebietes an ein Bogenpolygon gehen, ist um zwei größer, als die Anzahl der Tangenten aus den Punkten des negativen Gebietes.

Wir werden nur solche Bogenpolygone betrachten, deren Punkte im Endlichen liegen. Man könnte aber den Begriff der Bogenpolygone im projektiven Sinne verallgemeinern.

## 5. Die Darstellung einer Kurve vom Maximal-Klassenindex durch Bogenpolygone.

Wir haben mit den Sätzen 2, 3 und 4 die Existenz der aus einem Zuge bestehenden algebraischen und nichtalgebraischen Kurven vom Maximal-Klassenindex bewiesen. Wir können aber durch Bogenpolygone auch aus mehreren Zügen bestehende Kurven vom Maximal-Klassenindex darstellen, wie der folgende Satz zeigt:

5. Man kann Kurven vom Maximal-Klassenindex aus Bogenpolygonen auf folgende Weise zusammensetzen. Wir nehmen in der Ebene ein oder mehrere auseinanderliegende Bogenpolygone von demselben Typus (konvex bzw. konkav) und im Inneren der Bogenpolygone 0, 1 oder mehrere ganz auseinanderliegende Bogenpolygone vom entgegengesetzten Typus (konkav bzw. konvex), in dem Inneren dieser letzten Bogenpolygone nehmen wir wieder solche auseinanderliegende Bogenpolygone, die entgegengesetzten Typus haben (konvex bzw. konkav) und so weiter.

Ist die Anzahl der Bogenpolygone  $N$ , so teilen sie die Ebene in  $N + 1$  Gebiete. Aus jedem Punkte eines Gebietes geht die gleiche Anzahl Tangenten an die Kurve  $C$ , deren Züge die angenommenen Bogenpolygone sind. Der Unterschied zwischen der Anzahl der Tangenten, die aus je einem Punkte zweier benachbarter Gebiete an die Kurve  $C$  gehen, ist Zwei. Wir sagen, daß zwei Bogenpolygone auseinanderliegen, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben und keines der beiden Bogenpolygone im Innern des anderen, d. h. im Innern des von dem anderen Bogenpolygon begrenzten endlichen Gebiets liegt.

Wir nennen zwei Gebiete benachbart, wenn ihre Grenzlinien wenigstens ein Bogenpolygon gemeinsam haben. Es ist leicht zu bemerken, daß je eines der  $N + 1$  Gebiete — von den Punkten des Gebietes aus gesehen — entweder aus konvexen oder aus konkaven Elementarbögen zusammengesetzt ist, und daß die Elementarbögen der Grenzlinien zweier benachbarten Gebiete — von den inneren Punkten aus gesehen — vom entgegengesetzten Typus sind. Wir nennen eines der  $N + 1$  Gebiete *positiv* oder *negativ*, je nachdem von seinen inneren Punkten aus die konvexe bzw. die konkave Seite seiner Grenzlinien erreichbar ist. Die Punkte der Grenzlinien sind zu den positiven Gebieten zu rechnen.

Aus einem beliebigen Punkte je eines positiven Gebietes geht die gleiche Anzahl Tangenten an die Kurve  $C$ . Wenn man nämlich aus einem positiven Gebiete in ein anderes positives gelangen will, so muß man ebensooft durch positive wie durch negative Gebiete hindurchgehen. Bei diesem Durchgang nimmt die Anzahl der Tangenten, die aus einem Punkte  $P$  an die Kurve gehen, um Zwei zu bzw. ab, je nachdem der Punkt aus einem negativen Gebiete in ein positives, oder aus einem positiven Gebiete in ein negatives kommt.

Daraus folgt, daß die Anzahl der Tangenten, die aus einem beliebigen Punkte je eines positiven Gebietes an die Kurve gehen, dieselbe ist. Ähnliches gilt auch für die negativen Gebiete. Weil der Unterschied zwischen der Anzahl der Tangenten, die aus den Punkten zweier benachbarter Gebiete an die Kurve gehen, gleich Zwei ist, ist die Anzahl der Tangenten, die aus einem Punkte eines positiven Gebietes an die Kurve  $C$  gehen, um Zwei größer als die Anzahl der Tangenten aus einem Punkte eines negativen Gebietes. Daraus folgt ohne weiteres, daß die Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex ist. Die Anzahl der Tangenten, die aus einem Punkte  $P$  der Ebene an die Kurve  $C$  gehen, ist die Klasse bzw. der Klassenindex, je nachdem der Punkt in einem positiven oder in einem negativen Gebiete liegt.

Sind die Bogenpolygone in der Ebene in anderer Lage, wie in dem Satz 5 angenommen wird, so ist die daraus zusammengesetzte Kurve  $C_1$

nicht vom Maximal-Klassenindex. Es gäbe nämlich bei jeder anderen Lage der Bogenpolygone wenigstens ein solches Gebiet, dessen Grenze — von seinen inneren Punkten aus gesehen — teils von konvexen, teils von konkaven Elementarbögen gebildet würde. Ein solches Gebiet existiert z. B. immer, wenn zwei Bogenpolygone einander schneiden.

Es sei  $P_1$  bzw.  $P_2$  ein Punkt, der außerhalb eines teils von konvexen, teils von konkaven Elementarbögen begrenzten Gebietes  $G$  an der konvexen bzw. konkaven Seite eines der Elementarbögen der Grenzlinie von  $G$  liegt, so gehen aus dem Punkte  $P_1$  an die Kurve  $C$  vier Tangenten weniger als aus  $P_2$ , weil man aus dem Punkte  $P_1$  zu  $P_2$  über das Gebiet  $G$  so gelangen kann, daß man Elementarbögen nur zweimal durchschreitet, und zwar beide Male in der Richtung von der konkaven Seite nach der konvexen.

Wenn wir im Satze 5 die Bogenpolygone aus einer solchen Lage, bei welcher keine zwei der Bogenpolygone miteinander gemeinsame Punkte haben, einander sich nähern lassen, gelangen wir zu einer Grenzlage, in welcher zwei oder mehrere der Bogenpolygone einander berühren, aber nicht schneiden. Die von diesen Bogenpolygonen gebildete Kurve ist wieder vom Maximal-Klassenindex.

Der Satz 5 und die folgenden Sätze gelten auch für die Kurven, die zwei oder mehrere berührende Züge haben.

#### 6. Kurven $n$ -ter Klasse, für welche die Summe der Klassenindizes ihrer Züge $n - 2$ ist.

Auf Grund der vorhergehenden zwei Sätze können wir leicht den folgenden Satz beweisen:

6. *Es gibt für jede ganze positive Zahl  $n$  solche algebraische<sup>10a)</sup> und nichtalgebraische Kurven  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $r$  Zügen von den Klassenindizes  $i_1, i_2, \dots, i_r$  zusammengesetzt sind, wo die Klassenindizes nur der Gleichung*

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r = n - 2$$

*genügende ganze positive Zahlen sind, unter denen ein Klassenindex auch Null sein kann.*

Eine solche Kurve wird von  $r - 1$  ganz auseinanderliegenden konkaven Bogenpolygonen mit der Seitenanzahl  $n_1 = i_1 + 2$ ,  $n_2 = i_2 + 2$ , ...,  $n_{r-1} = i_{r-1} + 2$  und einem die vorigen in seinem Inneren enthaltenden  $i_r (\geq 0)$ -seitigen konvexen Bogenpolygone gebildet.

<sup>10a)</sup> Die Klasse der algebraischen Kurven ist hier und im folgenden nicht die Gradzahl der darstellenden algebraischen Gleichung, sondern die Realitätsklasse der Kurve. Diese Zahl ist im allgemeinen um eine gerade positive Zahl kleiner als jene.



Für diese Kurve ist das Gebiet, welches zwischen dem konvexen Bogenpolygone und den konkaven Bogenpolygonen liegt, ein negatives Gebiet; für den Klassenindex gilt also die Gleichung:

$$n - 2 = i_1 + i_2 + \dots + i_r.$$

Ist jeder der Klassenindizes von Null verschieden, so kann man das  $i_r$ -seitige konvexe Bogenpolygon durch ein  $i_r + 2$ -seitiges konkaves Bogenpolygon ersetzen, das ganz außerhalb der übrigen  $r - 1$  konkaven Bogenpolygone liegt und keines unter ihnen umgibt.

Aus diesem Satze folgt für

$$i_1 = i_2 = \dots = i_r = 1, \text{ bzw. } i_1 = i_2 = \dots = i_{r-1} = 1 \text{ und } i_r = 0$$

der folgende Satz:

7. *Es gibt für jede ganze Zahl  $n \geq 2$  solche algebraische und nichtalgebraische Kurven  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, welche  $n - 2$  Züge dritter Klasse haben und außer diesen noch einen Zug gerader Klasse haben können, welcher notwendigerweise ein Oval (vom Index und Klassenindex Null) ist.*

Eine diesem Satze entsprechende Kurve  $n$ -ter Klasse mit  $n - 2$  Zügen dritter Klasse wird durch  $n - 2$  ganz auseinanderliegende dreiseitige konkave Bogenpolygone oder durch  $n - 3$  solche auseinanderliegende dreiseitige konkave Bogenpolygone dargestellt, die innerhalb eines einseitigen konvexen Bogenpolygons ( $V_1$ ) enthalten sind.

Eine dem Satze entsprechende Kurve  $n$ -ter Klasse mit einem Oval wird durch  $n - 2$  ganz auseinanderliegende dreiseitige konkave Bogenpolygone und ein solches Oval dargestellt, das die  $n - 2$  Züge dritter Klasse im Innern enthält.

Die Kurven, von welchen die vorhergehenden Sätze handeln, haben auch die Eigenschaft, daß die Summe der Klassenindizes ihrer Züge maximal ist, d. h. daß sie zugleich von Maximal-Klassenindizes-Summe sind.

7. Kurven  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, für welche die Summe der Klassenindizes kleiner ist als  $n - 2$ .

Wir werden jetzt die Existenz von Kurven vom Maximal-Klassenindex beweisen, die nicht zugleich die maximale Summe der Klassenindizes ihrer Züge haben.

8. *Es gibt für jede ganze positive Zahl  $n$  solche algebraische und nichtalgebraische Kurven  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $r$  Zügen von den Klassenindizes  $i_1, i_2, \dots, i_r$  zusammengesetzt sind, wo die Klassenindizes und  $h$  der Gleichung*

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2h = n - 2 \quad (h \leq r)$$



genügende nichtnegative ganze Zahlen sind, und höchstens  $h+1$  unter den Klassenindizes  $i_1, i_2, \dots, i_r$  verschwinden können.

Wir können eine solche Kurve durch Bogenpolygone auf mehrfache Weise bilden. Eine solche Kurve wird z. B. durch  $h+1$  ganz auseinanderliegende  $i_1, i_2, \dots, i_{h+1}$ -seitige konvexe Bogenpolygone und  $r-h-1$  ganz auseinanderliegende  $i_{h+2}+2, i_{h+3}+2, \dots, i_r+2$ -seitige konkave Bogenpolygone gebildet, wenn die konkaven Bogenpolygone im Innern eines konvexen Bogenpolygons liegen, und  $i_k > 0$  ( $k = h+2, h+3, \dots, r$ ) ist.

Für die so dargestellte Kurve ist das Gebiet, das innerhalb des ersten konvexen Bogenpolygons und außerhalb der  $r-h-1$  konkaven Bogenpolygone liegt, negativ, also ist die Anzahl der Tangenten aus den Punkten dieses Gebietes

$$\begin{aligned} n-2 &= i_1 + i_2 + 2 + i_3 + 2 + \dots + i_{h+1} + 2 + i_{h+2} + i_{h+3} + \dots + i_r \\ &= i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2h. \end{aligned}$$

Wir erhalten eine solche Kurve auch dann, wenn wir die auseinanderliegenden konkaven Bogenpolygone in das Innere mehrerer konvexer Bogenpolygone verteilen, oder, wenn wir bei dieser Lage der Bogenpolygone ein konvexes Bogenpolygon samt den in seinem Inneren liegenden konkaven Bogenpolygons — auf geeignete Weise verkleinert — in das Innere eines (in dem Inneren eines anderen konvexen Bogenpolygons liegenden) konkaven Bogenpolygons setzen usw.

Der größte Wert von  $h$  ist im Satze 8  $r-1$ . Erreicht  $h$  seinen größten Wert, so kann man den vorigen Satz auf folgende Weise ausdrücken:

9. Es gibt für jede ganze Zahl  $n \geq 2$  solche algebraische und nichtalgebraische Kurven  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $r$  Zügen von den Klassenindizes  $i_1, i_2, \dots, i_r$  bestehen, wo die Klassenindizes beliebige nur der Gleichung

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2(r-1) = n-2$$

genügende nichtnegative ganze Zahlen sind.

Eine solche Kurve wird durch  $r$  ganz auseinanderliegende  $i_1, i_2, \dots, i_r$ -seitige konvexe Bogenpolygone dargestellt.

Die kleinste Summe der Klassenindizes der Züge einer aus  $r$  Zügen bestehenden Kurve  $n$ -ter Klasse ist Null oder Eins, je nachdem  $n$  paar oder unpaar ist. Die Existenz solcher Kurven vom Maximal-Klassenindex spricht der folgende Satz aus:

10. Es gibt für jede ganze positive Zahl  $k$  solche algebraische und nichtalgebraische Kurven  $2k$ -ter bzw.  $(2+1)$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $k$  Ovalen bzw.  $k$  Ovalen und einem Zuge dritter Klasse bestehen.

Ist die Klasse  $2k$ , so wird eine Kurve von der gewünschten Beschaffenheit von  $k$  ganz auseinanderliegenden Ovalen dargestellt. Ist aber die Klasse  $2k+1$ , so bekommen wir eine Kurve mit den gewünschten Eigenschaften, wenn wir in das Innere eines Ovals ein dreiseitiges konkaves Bogenpolygon setzen,  $h (\leq k-1)$  der übrigen  $k-1$  Ovale in das Innere des dreiseitigen konkaven Bogenpolygons, die übrigen  $k-1-h$  Ovale ganz außerhalb des ersten Ovals und ganz auseinander legen.

In diesem letzten Satze, wie im Satze 7, wurde die Existenz solcher aus  $p$  Zügen unpaarer Klasse und aus  $q$  Zügen paarer Klasse bestehenden Kurven  $n$ -ter Klasse bewiesen, für welche die Gleichung

$$p + 2q = n$$

gültig war. Wir beweisen jetzt den folgenden allgemeineren Satz:

11. *Es gibt für jede ganze Zahl  $n \geq 2$  solche algebraische und nichtalgebraische Kurven vom Maximal-Klassenindex, die aus  $p (\leq n-2)$  Zügen von unpaarer Klasse und aus  $q$  Zügen von paarer Klasse bestehen, wo  $p$  und  $q$  beliebige der Gleichung*

$$p + 2q = n$$

*genügende nichtnegative ganze Zahlen sind. Der Klassenindex je eines Zuges ist entweder Null oder Eins.*

Eine Kurve von dieser Beschaffenheit wird z. B. durch  $q$  ganz auseinanderliegende Ovale und durch  $p$  ganz auseinanderliegende dreiseitige konkave Bogenpolygone dargestellt, wenn die konkaven Bogenpolygone im Innern eines Ovals (oder in den Inneren mehrerer Ovale) liegen.

Das Gebiet, welches außerhalb der  $q$  Ovale liegt, ist nämlich für die dargestellte Kurve positiv. Aus einem Punkte dieses Gebietes gehen an ein Oval zwei Tangenten, an ein dreiseitiges konkaves Bogenpolygon eine; daraus folgt also, daß  $n = p + 2q$  ist.

## 8. Kurven vom Maximal-Klassenindex mit ineinanderliegenden Ovalen.

Auf die Frage, wie viele solche Ovale eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex haben kann, deren erstes im Innern des zweiten Ovals, das zweite im Innern des dritten usw. liegt, gibt der folgende Satz Antwort:

12. *Es gibt für jede ganze positive Zahl  $k$  solche algebraische und nichtalgebraische Kurven  $(3k-1)$ -,  $3k$ - und  $(3k+1)$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die  $k$  solche Ovale haben, daß das erste der Ovale im Innern des zweiten, das zweite im Innern des dritten und endlich das  $(k-1)$ -te im Innern des  $k$ -ten Ovals liegt.*

Für den Beweis dieses Satzes ziehen wir drei Fälle in Betracht, je nachdem  $n = 3k - 1$ ,  $= 3k$ , bzw.  $= 3k + 1$  ist.

Ist die Klassenzahl  $3k - 1$ , so stellen wir eine Kurve mit den genannten Eigenschaften auf folgende Weise her:

Wir legen in das Innere eines Ovals ein dreiseitiges konkaves Bogenpolygon, in das Innere dieses Bogenpolygons wieder ein Oval, in das Innere dieses Ovals wieder ein dreiseitiges konkaves Bogenpolygon usw. und endlich in das Innere des  $(k - 1)$ -ten dreiseitigen konkaven Bogenpolygons ein  $k$ -tes Oval.

Die so dargestellte Kurve hat die Klasse  $3k - 1$ , weil das Gebiet, das außerhalb des ersten Ovals liegt, für die Kurve positiv und die Anzahl der Tangenten aus einem Punkte dieses Gebietes  $2k + k - 1 = 3k - 1$  ist.

Ist die Klassenzahl  $3k$ , so wird eine Kurve von der gewünschten Eigenschaft eben so hergestellt wie vorher, nun legt man in das Innere des letzten  $(k)$ -ten Ovals ein letztes  $(k)$ -tes dreiseitiges konkaves Bogenpolygon.

Ist die Klassenzahl  $3k + 1$ , so nimmt man zu den Zügen der im ersten Falle konstruierten Kurve ein  $k$ -tes Oval hinzu, das ganz außerhalb der übrigen  $k - 1$  Ovale liegt.

Es ist leicht einzusehen, daß die Klasse in den letzten zwei Fällen  $3k$  bzw.  $3k + 1$  ist.

Für die Kurven vom Maximal-Klassenindex und ähnlicher Beschaffenheit gilt der folgende Satz:

13. *Es gibt für jede ganze Zahl  $n \geq 3$  aus  $r \geq 2$  Züge bestehende algebraische und nichtalgebraische Kurven vom Maximal-Klassenindex, die  $h$  solche Ovale unter den  $r$  Zügen haben, von denen das erste Oval im Innern des zweiten, das zweite im Innern des dritten usw. liegt, wo  $h$  die größte in  $\frac{r+1}{2}$  enthaltende ganze Zahl bedeutet.*

Wir erhalten eine solche Kurve, wenn wir im Innern eines Ovals ein konkaves Bogenpolygon, im Innern dieses Bogenpolygons ein Oval, im Innern dieses Ovals wieder ein konkaves Bogenpolygon usw. annehmen. Der letzte Zug ist ein Oval oder ein konkaves Bogenpolygon, je nachdem die Zahl  $h$  unpaar bzw. paar ist.

Aus einem Punkte, der im Innern des innersten Bogenpolygons (Ovals oder konkaven Bogenpolygons) liegt, gehen nur an die konkaven Bogenpolygone Tangenten, und zwar an je ein konkaves Bogenpolygon so viele Tangenten, wie die Anzahl seiner Seiten oder seiner Spitzen ist. Ist das innerste Bogenpolygon ein Oval, so ist sein Inneres für die dargestellte Kurve negativ, also ist die Summe der Anzahl der Spitzen der konkaven Bogenpolygone  $n - 2$ . Ist das innerste Bogenpolygon konkav, so ist die vorige Summe die Klasse der dargestellten Kurve, nämlich  $n$ .

## Zweites Kapitel.

## Über die Eigenschaften der ebenen Kurven vom Maximal-Klassenindex.

## 9. Allgemeine Eigenschaften der Kurven vom Maximal-Klassenindex.

Wir haben im vorigen Abschnitte algebraische und nichtalgebraische Kurven vom Maximal-Klassenindex aus Bogenpolygonen, also aus speziellen Kurven hergestellt und für die so hergestellten speziellen Kurven Sätze bewiesen. Wir können aber noch nicht behaupten, daß die bewiesenen Sätze ganz allgemein sind, d. h. daß sie nicht in allgemeineren Sätzen enthalten sind. Wir werden jetzt von allgemeinen Kurven vom Maximal-Klassenindex ausgehen und beweisen, daß die Sätze des ersten Kapitels allgemeinen Charakter haben.

Wir nehmen an — wie in der Einleitung gesagt wurde —, daß die Kurven vom Maximal-Klassenindex keinen Punkt- oder Geradenzug haben. Bei dieser Annahme ist die Klasse eines Zuges vom Maximal-Klassenindex Eins 3.

Für die Eigenschaften der Kurven vom Maximal-Klassenindex werden wir erst die folgenden leicht beweisbaren Sätze behaupten:

I. *Der maximale Klassenindex einer (von  $n$  Punkten verschiedenen) Kurve  $n$ -ter Klasse ist  $n - 2$ .*

II. *Eine Kurve vom Maximal-Klassenindex hat keine Doppelpunkte mit verschiedenen Tangenten und hat nicht mehr als eine Wendetangente<sup>11)</sup>. Hat die Kurve eine Wendetangente, so hat sie außer dem Wendepunkte keinen Schnittpunkt mit der Wendetangente. (Es ist möglich, daß die Kurve von der Wendetangente in einem von dem Wendepunkte verschiedenen Punkte berührt, aber nicht geschnitten wird.)*

III. *Aus jedem Punkte einer Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex und aus jedem Punkte ihrer einzigen Wendetangente — wenn die Kurve überhaupt eine Wendetangente hat — gehen  $n$  Tangenten an die Kurve.*

Unter diesen  $n$  Tangenten ist die Tangente eines Punktes für diesen Punkt, die Wendetangente für einen beliebigen ihrer Punkte zweifach, die Wendetangente für den Wendepunkt dreifach zu rechnen.

Die letzten zwei Sätze folgen daraus, daß die Anzahl der Tangenten einer Kurve aus einem Punkte bei der Bewegung des Punktes sich nur

<sup>11)</sup> Die Schnabelspitze ist — als Koinzidenz einer Spitze und eines Wendepunktes — auch zu den Wendepunkten zu rechnen.

dann ändert, wenn der Punkt während der Bewegung entweder die Kurve oder ihre Wendetangente überschreitet. Überschreitet der Punkt die Kurve in einem gewöhnlichen Punkte, oder eine Wendetangente, so nimmt die Anzahl der aus dem Punkte an die Kurve gehenden Tangenten um zwei zu oder ab.

Hätte eine Kurve vom Maximal-Klassenindex einen eigentlichen Doppelpunkt mit verschiedenen Tangenten oder zwei Wendetangenten, oder schnitte eine Wendetangente die Kurve noch außerhalb des Wendepunktes, oder endlich wäre die Anzahl der aus einem Punkte der Kurve an sie gehenden Tangenten kleiner als  $n$ , so gäbe es einen Punkt in der Ebene — in der Nähe des Doppelpunktes, des Schnittpunktes von zwei Wendetangenten, des Schnittpunktes der Wendetangente mit der Kurve außerhalb des Wendepunktes, bzw. in der Nähe des Punktes der Kurve, aus welchem höchstens  $n - 2$  Tangenten an die Kurve gehen —, von dem höchstens  $n - 4$  Tangenten an die Kurve gehen. Daraus folgte, daß die Kurve nicht vom Maximal-Klassenindex wäre.

*IV. Jeder Zug einer Kurve vom Maximal-Klassenindex ist wieder eine Kurve vom Maximal-Klassenindex.*

Wäre nämlich ein Zug  $Z$   $m$ -ter Klasse nicht vom Maximal-Klassenindex, so gäbe es einen Punkt in der Ebene, von dem an die Kurve  $Z$  genau  $m$  Tangenten, und einen anderen Punkt, von dem an den Zug  $Z$  höchstens  $m - 4$  Tangenten gehen. Wenn diese zwei Punkte (ohne die eventuell existierende Wendetangente zu überschreiten) sich so bewegen, daß sie auf den Zug  $Z$  kommen, dann erhalten wir zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf dem Zuge  $Z$  so, daß aus dem einen Punkte,  $P_1$ , an  $Z$   $m$ , aus dem anderen,  $P_2$ , höchstens  $m - 2$  Tangenten gehen. Während der Punkt  $P$  auf dem Zuge  $Z$  vom  $P_1$  aus bis zum Punkte  $P_2$  geht, müssen zwei von den  $m - 2$  Tangenten, die aus dem Punkte  $P$  außer seiner Tangente an die Kurve  $Z$  gehen, wenigstens einmal zusammenfallen und nachher verschwinden. Dies tritt nur dann ein, wenn der Punkt  $P$  entweder die Kurve in einem Doppelpunkte oder ihre Wendetangente in einem Punkte außerhalb des Wendepunktes überschreitet. Weil die Kurve  $Z$  ein Zug einer Kurve vom Maximal-Klassenindex ist, so ist jeder dieser zwei Fälle unmöglich.

# 10. Über die Lage der Züge einer Kurve vom Maximal-Klassenindex.

Entsprechend dem Satze 5 gilt der folgende Satz:

*V. Hat eine aus  $r$  Zügen bestehende Kurve vom Maximal-Klassenindex keine Wendetangente, so wird die projektive Ebene durch die  $r$  Züge, hat sie aber eine Wendetangente, so wird die projektive Ebene*

durch die  $r$  Züge und die Wendetangente in  $r - 1$  zusammenhängende Gebiete zerlegt. Aus allen Punkten eines Gebietes geht dieselbe Anzahl der Tangenten an die Kurve (diese Anzahl ist entweder die Klasse oder der Klassenindex der Kurve).

Aus den inneren Punkten eines Gebietes kann man entweder nur die konvexen oder nur die konkaven Seiten der Elementarbögen der Grenzlinien des Gebietes erreichen.

Zum Beweis des Satzes bemerken wir, daß die  $r$  Züge der Kurve nach den Sätzen II und III weder sich, noch einander schneiden können. Hat die Kurve eine Wendetangente, so kann diese außerhalb des Wendepunktes die Kurve auch nicht schneiden. Wir fassen erstens den Fall ins Auge, wo die Züge der Kurve weder sich selbst, noch einander berühren und sie auch von der Wendetangente außerhalb des Wendepunktes nicht berührt werden.

Wir bedürfen des folgenden Hilfssatzes<sup>12)</sup>:

Die projektive Ebene wird durch eine Kurve paarer Ordnung in Gebiete eingeteilt. Man kann diese Gebiete mit den Vorzeichen  $+$  und  $-$  so charakterisieren, daß benachbarte Gebiete, d. h. zwei Gebiete, die einen Bogen der Grenzlinien gemein haben, entgegengesetzte Vorzeichen haben. (Für Kurven ungerader Ordnung gilt der Satz nicht.)

Die Ordnung der Kurve ist unpaar oder paar, je nachdem sie eine Wendetangente hat oder keine. Dies folgt aus dem Satze von Staudt,

<sup>12)</sup> Siehe L. Brusotti: Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante piccola variazione, Annali di matematica 1913.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist der folgende:

Wir ziehen durch einen Punkt  $P$ , der außerhalb der Kurve  $C$  von paarer Ordnung liegt, eine Gerade  $g$ , welche die Kurve  $C$  in voneinander verschiedenen Punkten schneidet. Die Kurve wird von der Geraden in einer paaren Anzahl von Punkten geschnitten. Diese Schnittpunkte zerteilen die im projektiven Sinne geschlossene Gerade in eine paare Anzahl von Abschnitten. Man kann also diese Abschnitte mit den Vorzeichen  $+$  und  $-$  so bezeichnen, daß zwei aufeinanderfolgende Abschnitte entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Geben wir dem Abschnitte der Geraden  $g$ , der den Punkt  $P$  enthält, ein bestimmtes Vorzeichen, so wird durch die Forderung, daß benachbarte Abschnitte entgegengesetzte Vorzeichen haben sollen, das Vorzeichen jedes Abschnittes der Geraden eindeutig bestimmt. Wenn wir die Gerade  $g$  um den Punkt  $P$  drehen, so werden die Vorzeichen der Abschnitte, die durch die Schnittpunkte der Kurve paarer Ordnung  $C$  mit der Geraden begrenzt sind, durch das Vorzeichen des den Punkt  $P$  enthaltenden Abschnittes eindeutig bestimmt. Während der Drehung der Geraden beschreiben die Abschnitte der Geraden die Gebiete der Ebene, in welche die Ebene durch die Kurve  $C$  zerteilt wird. Wenn wir jedes Gebiet mit demjenigen Vorzeichen charakterisieren, welches der beschreibende Abschnitt hat, so haben die benachbarten Gebiete entgegengesetzte Vorzeichen.

daß die Anzahl der Wendetangenten einer Kurve unpaar oder paar ist, je nachdem die Ordnung der Kurve unpaar oder paar ist.

Auf Grund des Hilfssatzes ist also bewiesen, daß man die Gebiete, in welche die Ebene durch eine Kurve paarer Ordnung vom Maximal-Klassenindex (ohne Wendetangente) oder durch eine Kurve unpaarer Ordnung vom Maximal-Klassenindex und durch ihre Wendetangente zerteilt wird, mit positiven und negativen Vorzeichen so charakterisieren kann, daß zwei benachbarte Gebiete entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Aus Punkten von Gebieten, die gleiche Vorzeichen haben, geht die gleiche Anzahl Tangenten an die Kurve.

Aus allen Punkten eines Gebietes geht die gleiche Anzahl Tangenten an die Kurve, weil man von einem Punkte zu jedem anderen Punkte des Gebietes gelangen kann, ohne die Kurve oder ihre Wendetangente zu überschreiten. Man gelangt aus einem Gebiete in ein benachbartes, wenn man entweder die Kurve oder ihre Wendetangente überschreitet. In beiden Fällen ändert sich die Anzahl der Tangenten um zwei.

Überschreitet man die Grenzlinien eines Gebietes in irgendeinem Punkte, so ist die Veränderung der Anzahl der Tangenten immer dieselbe, und zwar Zunahme bzw. Abnahme. Dies folgt daraus, daß die Anzahl der Tangenten der Kurve aus einem beliebigen Punkte der Ebene entweder  $n$  oder  $n - 2$  ist.

Daraus folgt die Richtigkeit des Satzes V für eine Kurve vom Maximal-Klassenindex, die keine berührenden Züge hat und die von ihrer eventuellen Wendetangente außerhalb des Wendepunktes nicht berührt wird. Die Gültigkeit des Satzes für den Fall, wo diese Annahmen nicht erfüllt sind, folgt als Grenzlage des Falles, wo die Annahmen in Erfüllung gehen.

#### 11. Über die Kurven vom Maximal-Klassenindex, für welche die Summe der Indizes ihrer Züge maximal ist.

Wir können auf Grund des Satzes 6 den folgenden Satz behaupten:

VI. Für eine Kurve  $n$ -ter Klasse, die aus  $r$  Zügen vom Klassenindex  $i_1, i_2, \dots, i_r$  bestehen, ist das Maximum der Summe

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r$$

$n - 2$ . Erreicht diese Summe das Maximum, so ist die Kurve vom Maximal-Klassenindex und kann höchstens ein Oval haben.

Es gibt für jede ganze Zahl  $n (\geq 2)$  algebraische und nichtalgebraische Kurven  $n$ -ter Klasse (vom Maximal-Klassenindex), die aus  $r$  Zügen vom Klassenindex  $i_1, i_2, \dots, i_r$  bestehen. Hier bedeuten die Klassenindizes beliebige nur der Gleichung

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r = n - 2$$



genügende ganze positive Zahlen. Unter ihnen kann aber ein Klassenindex auch Null sein.

Für den Beweis müssen wir nur zeigen, daß eine Kurve vom Maximal-Klassenindex, für welche die Summe der Indizes ihrer Züge maximal ist, höchstens ein Oval haben kann.

Hätte eine Kurve  $n$ -ter Klasse mit der Klassenindizesumme  $n - 2$  zwei oder mehrere Ovale, so gingen an die zwei Ovale aus dem Schnittpunkte je einer Tangente der zwei Ovale je zwei, an jeden anderen Zug wenigstens so viele Tangenten, wie sein Klassenindex ist. Aus diesem Schnittpunkte gingen also an die Kurve wenigstens  $n + 2$  Tangenten. Dies ist aber unmöglich.

Der Klassenindex eines Zuges unpaarer Klasse ist wenigstens Eins, auf Grund der Sätze 6 und 7 können wir also den folgenden Satz behaupten:

VII. *Das Maximum der Anzahl der Züge unpaarer Klasse einer Kurve  $n$ -ter Klasse (deren Züge von Punkten verschieden sind), ist  $n - 2$ . Hat eine Kurve  $n$ -ter Klasse  $n - 2$  Züge unpaarer Klasse, so sind sie alle dritter Klasse und außer diesen  $n - 2$  Zügen kann die Kurve nur noch ein Oval haben.*

Für die Kurven  $n$ -ter Klasse, die maximale Anzahl von Zügen unpaarer Klasse haben, gilt der folgende Satz:

VIII. *Eine Kurve  $n$ -ter Klasse, welche die maximale Anzahl von Zügen unpaarer Klasse (d. h.  $n - 2$ ) hat, hat immer wenigstens  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  Doppeltangenten. Jede dieser Doppeltangenten berührt zwei verschiedene Züge unpaarer Klasse.*

Die Kurve hat außer diesen Doppeltangenten keine anderen, wenn sie noch ein Oval enthält: sie kann aber noch eine, aber nur eine haben, wenn das Oval nicht auftritt. Diese letzte Doppeltangente berührt nur einen Zug unpaarer Klasse.

Man kann alle diese Möglichkeiten in der Tat für alle  $n \geq 2$  verwirklichen.

Zwei Züge unpaarer Klasse haben eine unpaare Anzahl von gemeinsamen Tangenten, also wenigstens eine gemeinsame Tangente. Die Anzahl der gemeinsamen Tangenten für zwei Züge unpaarer Klasse kann aber nicht größer als Eins sein. Wäre sie größer, so könnte man aus dem Schnittpunkte der zwei gemeinsamen Tangenten an die betreffenden zwei Züge je drei, an die übrigen Züge wenigstens je eine Tangente und daher an die Kurve  $n$ -ter Klasse wenigstens  $n + 2$  Tangenten ziehen. Somit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.



Enthält die Kurve auch ein Oval, so hat sie keine anderen Doppeltangenten. Das Oval und ein Zug unpaarer Klasse haben keine gemeinsame Tangente. Hätten sie eine, so hätten sie eine paare Anzahl von gemeinsamen Tangenten. Man könnte dann aus dem Schnittpunkte von solchen zwei gemeinsamen Tangenten an das Oval 2, an den Zug unpaarer Klasse 3, an die übrigen Züge unpaarer Klasse zusammen mindestens  $n - 3$ , und daher an die Kurve wenigstens  $n + 2$  Tangenten ziehen, was eine Unmöglichkeit ist. Ein Zug unpaarer Klasse kann keine Doppeltangente haben. Hätte er eine Doppeltangente, so hätte die Doppeltangente einen Punkt, aus welchem man an das Oval 2, an den Zug unpaarer Klasse 3, an die übrigen Züge wenigstens  $n - 3$  Tangenten, und somit an die Kurve wenigstens  $n + 2$  Tangenten ziehen könnte.

Hat die Kurve kein Oval, so kann höchstens ein Zug unpaarer Klasse eine und nur eine Doppeltangente haben. Hätten zwei Züge je eine Doppeltangente, so könnte man aus dem Schnittpunkte der Doppeltangenten wenigstens  $n + 2$  Tangenten an die Kurve ziehen. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes gerechtfertigt.

Wir haben die entsprechenden Kurven im § 6 des vorigen Kapitels für jedes  $n \geq 2$  dargestellt. Hier wollen wir nur bemerken, daß eine Kurve  $V_1$  eine Doppeltangente hat.

## 12. Über Kurven vom Maximal-Klassenindex, für welche die Summe der Klassenindizes ihrer Züge kleiner ist als ihr Klassenindex.

Auf Grund der Sätze 8 und 9 können wir für die Kurven vom Maximal-Klassenindex, die nicht die maximale Summe der Indizes ihrer Züge haben, die folgenden Sätze behaupten:

IX. Sind die Klassenindizes der Züge einer aus  $r$  Zügen bestehenden Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex  $i_1, i_2, \dots, i_r$ , so können höchstens  $h + 1$  der Züge Ovale sein, wo die nichtnegative ganze Zahl  $h$  der Gleichung bzw. Ungleichung

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2h = n - 2, \quad 0 \leq h \leq r - 1$$

genügt.

Es gibt für jede Klasse  $n \geq 2$  solche aus  $r$  Zügen bestehende algebraische und nichtalgebraische Kurven vom Maximal-Klassenindex, für welche die Klassenindizes ihrer Züge der Gleichung

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2h = n - 2$$

genügen, wo  $h$  eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, die kleiner als  $r$  ist, und höchstens  $h + 1$  der Klassenindizes  $i_1 + i_2 + \dots + i_r$  verschwinden können.

X. Das Minimum der Summe der Klassenindizes der Züge einer Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $r$  Zügen besteht, ist  $n - 2r$ , wenn diese Zahl nicht negativ ist.

Es gibt für jede Klasse  $n \geq 2$  aus  $r$  Zügen bestehende algebraische und nichtalgebraische Kurven, für welche die Klassenindizes ihrer Züge der Gleichung

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r = n - 2r = n - 2 - 2(r - 1) \geq 0$$

genügende beliebige nichtnegative ganze Zahlen sind.

Für den Beweis des Satzes IX müssen wir nur nachweisen, daß  $h \geq r$  unmöglich ist und höchstens  $h + 1$  der Klassenindizes  $i_1, i_2, \dots, i_r$  verschwinden können.

Nach dem Satze IV ist die Klasse des Zuges vom Klassenindex  $i_k$   $n_k = i_k + 2$ .

Wenn  $h \geq r$  wäre, so wäre

$$\begin{aligned} n &= i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2h + 2 \geq i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2r + 2 \\ &= n_1 + n_2 + \dots + n_r + 2, \end{aligned}$$

was eine Unmöglichkeit ist.

Wir werden jetzt nachweisen, daß höchstens  $h + 1$  der Klassenindizes  $i_1, i_2, \dots, i_r$  verschwinden können, wenn sie der Gleichung und Ungleichung

$$i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2h = n - 2, \quad 0 \leq h \leq r - 1$$

genügen.

Wäre diese Behauptung unrichtig, so gäbe es eine Kurve  $C$   $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die wenigstens  $h + 2$  Ovale hat. Wir bezeichnen die Ovale der Kurve  $C$  mit  $M_1, M_2, \dots, M_{h+2}, \dots$  und die Kurve, die aus den übrigen Zügen besteht, mit  $K$ .

Der Klassenindex der Kurve  $K$  ist wenigstens mit der Summe der Klassenindizes ihrer Züge, also mindestens mit  $n - 2 - 2h$  gleich.

Ein Oval zerteilt die Ebene in zwei Teile. Wir wollen das Gebiet, aus dessen Punkten keine Tangenten an das Oval gehen, das Innere, das andere Gebiet das Äußere des Ovals nennen. Dabei kann das Oval auch unendlichferne Punkte haben.

Auf Grund dessen hat die Behauptung, daß das Oval  $M_1$  im Innern des Ovals  $M_2$  liegt, einen bestimmten Sinn. Daraus aber folgt, daß das Oval  $M_2$  außerhalb  $M_1$  liegt, d. h. daß man aus den Punkten des Ovals  $M_2$  an das Oval  $M_1$  Tangenten ziehen kann.

Weil  $M_1$  im Innern des Ovals  $M_2$  liegt, so gehen aus den Punkten von  $M_1$  keine Tangenten an  $M_2$ , also schneidet jede Gerade das Oval  $M_2$ , die das Oval  $M_1$  schneidet oder berührt. Das Oval  $M_2$  hat also einen Punkt, aus welchem man an  $M_1$  Tangenten ziehen kann, aber dann gehen aus

jedem Punkte von  $M_2$  Tangenten an  $M_1$ , weil die Ovale  $M_1$  und  $M_2$  keinen gemeinsamen Punkt haben.

Wir können jetzt beweisen, daß jedes Oval der Kurve  $C$  im Innern wenigstens eines anderen liegt.

Aus einem Punkte  $P$  des Ovaes  $M_i$  gehen außer der Tangente im Punkte  $P$  höchstens  $n - 2$  Tangenten an die Kurve  $C$ , und gehen wenigstens  $i_1 + i_2 + \dots + i_r = n - 2h - 2$  Tangenten an die Kurve  $K$ . Man kann also aus dem Punkte  $P$  an höchstens  $h$  Ovale (außer  $M_i$ ) Tangenten ziehen. Daraus folgt, daß das Oval im Innern wenigstens eines anderen Ovaes der Kurve  $C$  liegt.

Auf Grund dessen können wir von je einem Oval der Kurve  $C$  ausgehend eine unendliche Reihe zugehöriger Ovale

$$M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}, \dots$$

so aufschreiben, daß jedes der Ovale im Innern der nachfolgenden liegt und die vorausgehenden in seinem Innern enthält. Dies ist aber eine Unmöglichkeit. Damit ist der Satz IX bewiesen. Der Satz X folgt aus dem Satz IX, wenn  $h + 1 = r$  ist.

### 13. Über Kurven vom Maximal-Klassenindex mit höchster Anzahl von Ovalen.

Auf die Frage, wie viele Ovale höchstens eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex haben kann, und wie ihre Ovale im extremen Falle in der Ebene liegen können, gibt der folgende Satz Antwort:

XI. Eine Kurve  $2k$ - oder  $(2k+1)$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex kann höchstens  $k$  Züge paarer Klasse haben. Erreicht die Anzahl der Züge paarer Klasse dieses Maximum, so sind sie alle Ovale, zu denen im Falle unpaarer Klasse ein Zug dritter Klasse ohne Wende- und Doppeltangente hinzutritt. Im Falle paarer Klasse liegt jedes Oval außerhalb des Innern aller übrigen Ovale. Im Falle unpaarer Klasse liegen die Punkte, aus denen an den Zug dritter Klasse drei Tangenten gehen, im Innern eines und nur eines Ovaes, und von den übrigen  $k - 1$  Ovalen liegt keines innerhalb eines anderen. Ein Teil von diesen  $k - 1$  Ovalen kann außerhalb des ersten Ovaes, der andere Teil innerhalb liegen. Diese letzteren Ovale liegen zugleich im Innern des Gebietes, aus dessen Punkten drei Tangenten an den Zug dritter Klasse gehen.

Es gibt für jede ganze positive Zahl  $k$  algebraische und nicht-algebraische Kurven  $2k$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $k$  Ovalen bestehen. Es gibt für jede ganze positive Zahl  $k$  algebraische und nichtalgebraische Kurven  $2k+1$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $k$  Ovalen und einem Zuge dritter Klasse bestehen, wobei

beliebige  $h \leq k-1$  von den  $k$  Ovalen innerhalb eines Ovals liegen, während die übrigen  $k-1-h$  Ovale außerhalb sind. Hier bedeutet  $h$  eine beliebige nichtnegative ganze Zahl.

Wir verstehen im Satze unter den Punkten, die innerhalb bzw. außerhalb eines Ovals liegen, Punkte, aus denen 0 bzw. zwei Tangenten an das Oval gehen.

Der erste Teil des Satzes folgt aus dem vorigen Satze. Wir werden aber später nachweisen, daß der Zug dritter Klasse keine Wende- und Doppeltangente hat.

Wir beweisen den zweiten Teil des Satzes auf Grund des Satzes III.

Ist die Klasse der Kurve  $2k$ , so gehen  $2(k-1)$  Tangenten aus jedem Punkte je eines Ovals an die übrigen Ovale, also sind alle Ovale außerhalb einander.

Ist die Klasse  $2k+1$ , so gehen aus einem Punkte des Gebietes  $T$ , aus dem man drei Tangenten an den Zug dritter Klasse ziehen kann,  $2k+1-3=2k-2$  Tangenten an die  $k$  Ovale. Das Gebiet  $T$  liegt also innerhalb eines Ovals  $M_0$ . Man kann aus je einem Punkte eines Ovals an den Zug dritter Klasse und an die übrigen Ovale zusammen  $2k+1-2=2k-1$  Tangenten ziehen. Daraus folgt, daß man aus je einem Punkte der Ovale, die im Gebiete  $T$  liegen, an die übrigen Ovale — ausgenommen das Oval  $M_0$  — Tangenten ziehen kann. Aus je einem Punkte der Ovale, die außerhalb des Gebietes  $T$  liegen, gehen Tangenten an die sämtlichen Ovale. Die Ovale außerhalb des Gebietes  $T$ , ebenso wie die Ovale innerhalb des Gebietes, liegen außerhalb einander.

Der Zug dritter Klasse kann keine Doppel- und Wendetangente haben. Hätte er eine Doppel- oder Wendetangente, so könnte man aus ihrem Schnittpunkte mit dem Oval  $M_0$  an den Zug dritter Klasse 3, an die  $k$  Ovale zusammen  $2k$ , also an die Kurve  $2k+1$ -ter Klasse  $2k+3$  Tangenten ziehen.

Wir haben die sämtlichen Typen der Kurven, welche die im Satze XI genannten Eigenschaften haben, im § 7 dargestellt.

Wie wir im Satze VIII die Anzahl der Doppeltangenten einer Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die die höchste Anzahl der Züge unpaarer Klasse hat, bestimmt haben, so bestimmen wir jetzt die Anzahl der Doppeltangenten für eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die die höchste Anzahl von Ovalen enthält.

XII. Je zwei Ovale einer Kurve  $2k$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die die höchste Anzahl von Ovalen ( $k$ ) enthält, haben je vier Tangenten miteinander gemein, und so hat die Kurve  $2k(k-1)$  Doppeltangenten.

*Die Anzahl der Doppeltangenten für eine Kurve  $2k+1$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die die höchste Anzahl der Ovale ( $k$ ) besitzt, ist  $2(k^2-1)$ .*

Dieser Satz folgt aus dem folgenden Satze von C. Juel<sup>13)</sup>:

Es werde eine Elementarkurve  $C_2$  weder von einer anderen Elementarkurve  $C_1$  noch von deren Wendetangenten oder Doppeltangenten geschnitten, und es habe jede Tangente von  $C_1$ , die überhaupt  $C_2$  schneidet,  $m$  Punkte mit derselben gemein. Die zwei Kurven haben dann entweder keine oder auch  $2n(m-1)$  Tangenten miteinander gemein, wenn aus irgendeinem Punkte von  $C_2$   $n$  Tangenten an  $C_1$  gehen.

Unter einer Elementarkurve versteht Juel eine geschlossene Kurve, die aus einer endlichen Anzahl von Elementarbögen zusammengesetzt ist. Der Begriff des Elementarbogens ist bei C. Juel projektiv, also kann ein Elementarbogen auch ins Unendliche gehen.

Ein Oval ist also immer eine Elementarkurve, aber auch eine Kurve dritter Ordnung ist eine Elementarkurve.

C. Juel hat nämlich bewiesen<sup>14)</sup>, daß eine stetige Kurve dritter Ordnung, die in jedem Punkte eine mit dem Berührungspunkte stetig sich ändernde Tangente und keinen Doppelpunkt und keine Spitze hat, drei Wendepunkte besitzt, von denen die Kurve in drei Elementarbögen zerlegt wird.

Auf Grund des Prinzips der Dualität folgt, daß eine Kurve dritter Klasse ohne Doppel- und Wendetangenten drei Spitzen hat, von denen sie in drei Elementarbögen zerlegt wird.

Wir werden den angeführten Satz von C. Juel für den Fall anwenden, daß die Kurve  $C_2$  ein Oval, die Kurve  $C_1$  ein Oval oder eine Kurve dritter Klasse mit drei Spitzen ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß das Oval  $C_2$  im Endlichen liegt, was man durch eine Projektion immer erreichen kann.

Es ist klar, daß die Anzahl der Tangenten, die das Oval  $C_2$  mit dem Oval  $C_1$  bzw. mit der Kurve  $\bar{C}_1$  dritter Klasse gemeinsam hat, Null ist, wenn die Kurve  $C_1$  bzw.  $\bar{C}_1$  innerhalb des Ovals  $C_2$  liegt.

Wir werden beweisen, daß die Kurven  $C_1$  und  $C_2$  bzw.  $\bar{C}_1$  und  $C_2$  gemeinsame Tangenten haben, wenn die Ovale  $C_1$  und  $C_2$  außerhalb einander liegen bzw. wenn die Kurve  $\bar{C}_1$  außerhalb des Ovals  $C_2$  ist. Für den Beweis ist es ausreichend, zu zeigen, daß die Kurve  $C_1$  bzw.  $\bar{C}_1$  eine Tangente hat, von der das Oval  $C_2$  nicht geschnitten wird. Hat die Kurve  $C_1$  bzw.  $\bar{C}_1$  eine das Oval  $C_2$  nicht schneidende Tangente, so hat

<sup>13)</sup> Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, a. a. O. S. 135.

<sup>14)</sup> A. a. O. S. 137–138.

sie auch Tangenten, die das Oval  $C_3$  berühren, weil sie auch solche Tangenten hat, von denen das Oval  $C_2$  geschnitten wird. Aus jedem Punkte von  $C_2$  geht nämlich wenigstens eine Tangente an die Kurve  $C_1$  bzw.  $\bar{C}_1$ .

Wir nehmen an, daß das Oval  $C_2$  von jeder Tangente  $t$  des Ovals  $C_1$  in zwei voneinander verschiedenen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  geschnitten wird. Es sei  $s$  die Bogenlänge desjenigen Elementarbogens  $\widehat{P_1 P_2}$  des Ovals  $C_2$ , der nicht länger ist, als der andere mit den Endpunkten  $P_1, P_2$ , so hat die Bogenlänge  $s$  ein Minimum, während die Tangente  $t$  längs der Kurve  $C_1$  sich bewegt. Es sei  $\widehat{A_1 A_2}$  derjenige von den Elementarbögen  $\widehat{P_1 P_2}$ , dessen Bogenlänge am kleinsten ist. Es sei  $a$  die Tangente des Ovals  $C_1$ , von der der Elementarbogen  $\widehat{A_1 A_2}$  ausgeschnitten wird.

Sind die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  voneinander verschieden, so ziehe man aus einem Punkte  $B_1$ , der auf dem Elementarbogen  $\widehat{A_1 A_2}$  in der Nachbarschaft des Punktes  $A_1$  liegt, an das Oval  $C_2$  diejenige Tangente  $b$ , welche von  $a$  wenig verschieden ist. Benennen wir den Schnittpunkt der Tangenten  $a$  und  $b$  mit  $P$ . Wenn der Punkt  $B_1$  dem Punkte  $A_1$  nahe genug liegt, so liegt  $P$  außerhalb der endlichen Strecke  $\overline{A_1 A_2}$ , also schneidet die Tangente  $b$  den Elementarbogen  $\widehat{A_1 A_2}$  noch in einem Punkte  $B_2$ . Daraus folgt, daß die Länge des Bogens  $\widehat{A_1 A_2}$  nicht am kleinsten ist, weil die des Bogens  $\widehat{B_1 B_2}$  kleiner ist. Daraus folgt, daß die Ovale  $C_1$  und  $C_2$  gemeinsame Tangenten haben.

Mit derselben Beweisführung kann man beweisen, daß auch die Kurven  $\bar{C}_1$  und  $C_2$  gemeinsame Tangenten haben.

Auf Grund des Satzes von C. Juel haben also zwei Ovale, die außerhalb einander liegen, vier gemeinsame Tangenten. Eine Kurve, die aus  $k$  außerhalb einander liegenden Ovalen besteht, hat also  $\frac{4k(k-1)}{2} = 2k(k-1)$  Doppeltangenten. Hiermit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Ein Oval und eine Kurve dritter Klasse, die außerhalb des Ovals liegt, haben nach dem Satze von C. Juel zwei oder sechs gemeinsame Tangenten, je nachdem man nur eine oder drei Tangenten aus einem Punkte des Ovals an die Kurve dritter Klasse ziehen kann.

Auf Grund dessen können wir auch den zweiten Teil des Satzes beweisen.

Wir bezeichnen die Ovale der Kurve  $(2k+1)$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die die höchste Anzahl der Züge paarer Klasse hat, mit  $M_0, M_1, \dots, M_{k-1}$ , den Zug dritter Klasse mit  $N$ . Es sei ferner  $M_0$  dasjenige Oval, welches den Zug  $N$  und die Ovale  $M_1, M_2, \dots, M_k$  in

seinem Inneren enthält, während die übrigen Ovale außerhalb  $M_0$  liegen; dann ist die Anzahl der Doppeltangenten

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4.$$

Hier bedeutet  $t_1$  bzw.  $t_2$  die Anzahl der gemeinsamen Tangenten der Ovale  $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}$  miteinander, bzw. mit dem Oval  $M_0$ , und  $t_3$  bzw.  $t_4$  die Anzahl der gemeinsamen Tangenten des Zuges dritter Klasse  $N$  mit den Ovalen  $M_1, M_2, \dots, M_h$  bzw.  $M_{h+1}, M_{h+2}, \dots, M_{k-1}$ .

Weil

$$t_1 = 4 \frac{(k-1)(k-2)}{2} = 2(k-1)(k-2), \quad t_2 = 4(k-1-h), \quad t_3 = 6h, \\ t_4 = 2(k-1-h)$$

ist, so ist

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2(k^2 - 1).$$

Hiermit ist auch der zweite Teil des Satzes XII bewiesen.

#### 14. Über Kurven $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex mit höchster Anzahl von Zügen unpaarer bzw. paarer Klasse.

Auf die Frage, wie viele Züge paarer bzw. unpaarer Klasse eine Kurve vom Maximal-Klassenindex höchstens haben kann, wenn sie  $p$  Züge unpaarer Klasse bzw.  $q$  Züge paarer Klasse hat, gibt auf Grund des Satzes 11 der folgende Satz Antwort:

XIII. *Hat eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex  $p$  Züge unpaarer und  $q$  Züge paarer Klasse, so erreicht der Wert  $q$  bei gegebenem  $p$  und  $p$  bei gegebenem  $q$  dann seinen maximalen Wert, wenn er eine der Gleichung*

$$p + 2q = n \quad \left( 0 \leq p \leq n-2, 0 < q \leq \frac{n}{2} \right)$$

*genügende ganze positive Zahl ist. Erreicht der Wert  $p$  oder  $q$  diesen maximalen Wert, so besteht die Kurve aus  $p$  Zügen dritter Klasse und aus  $q$  Ovalen.*

*Es gibt für jede ganze Zahl  $n \geq 2$  eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $p$  Zügen unpaarer und  $q$  Zügen paarer Klasse besteht, wenn die Zahlen  $p$  und  $q$  der Gleichung*

$$p + 2q = n \quad (0 \leq p \leq n-2)$$

*genügen.*

Wenn der erste Teil dieses Satzes unwahr wäre, so gäbe es eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, bestehend aus  $p$  Zügen unpaarer und  $q$  Zügen paarer Klasse so, daß  $p + 2q = n + 2$  ist, wo  $q \geq 2$  ist, weil  $p \leq n-2$  ist.



Es seien  $M_1, M_2, \dots, M_q$  die Züge paarer Klasse der Kurve. Aus den Punkten des Zuges  $M_i$  gehen höchstens  $n - 2$  Tangenten an die übrigen Züge, von denen mindestens  $p$  Tangenten an die Züge unpaarer Klasse gehen, also können höchstens  $2(q - 2)$  Tangenten an die übrigen  $q - 1$  Züge paarer Klasse gehen. Es gibt also wenigstens einen Zug  $M_i$ , paarer Klasse, an den keine Tangenten aus den Punkten des Zuges  $M_i$  gehen.

Wenn wir von dem Zuge  $M_i$  ausgehend ebenso verfahren, so können wir eine unendliche Reihe von Zügen paarer Klasse

$$M_i, M_i, M_i, \dots$$

so angeben, daß jeder dieser Züge innerhalb der folgenden liegt. Aus dieser Unmöglichkeit folgt die Wahrheit des ausgesprochenen Satzes, die sonst auch aus dem Satze IX gefolgert werden kann.

Aus diesem Satze folgt, daß die maximale Anzahl der Züge einer Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus  $q$  Zügen paarer Klasse besteht,  $p + q = n - q$  ist. Diese Zahl erreicht dann ihr Maximum, wenn die nichtnegative ganze Zahl  $p$  bzw.  $q$  ihr Maximum bzw. Minimum erreicht, was dann auftritt, wenn  $p = n - 2$  und  $q = 1$  ist. Wir können also den folgenden Satz behaupten:

*XIV. Die maximale Anzahl der Züge einer Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex ist  $n - 1$ . Erreicht die Anzahl der Züge diesen maximalen Wert, so sind  $n - 2$  Züge von dritter Klasse und ein Zug ein Oval.*

*Man kann jede Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die die maximale Anzahl der Züge hat, durch zentrale Projektion in das Endliche projizieren. Die endliche Projektion besteht aus einem Ovale und  $n - 2$  dreiseitigen konkaven Bogenpolygonen, die im Inneren des Ovals und außerhalb einander liegen.*

Man kann das Oval immer in das Endliche projizieren. Die Züge dritter Klasse liegen alle innerhalb des Ovals und außerhalb einander, weil aus den Punkten eines Zuges dritter Klasse an den Zug selbst 3, an die übrigen  $n - 3$  Züge dritter Klasse  $n - 3$  Tangenten gehen.

Nach dem Satze VIII hat ein Zug dritter Klasse keine Doppeltangente. (Er hat keine Wendetangente, weil er im Endlichen liegt und deshalb seine Ordnung paar ist.) Daraus folgt auf Grund des nach dem Satze XII Gesagten, daß jeder Zug dritter Klasse drei Spitzen hat und durch die drei Spitzen in drei Elementarbögen geteilt wird. Endlich folgt aus dem Satze V, daß jeder Zug dritter Klasse ein konkaves Bogenpolygon ist. Diese Bogenpolygone liegen außerhalb einander, d. h. außerhalb des von



je einem Bogenpolygone begrenzten endlichen Bereiches, weil aus einem Punkte je eines Bogenpolygons an jedes der übrigen nur eine Tangente geht. Damit ist der Satz XIV bewiesen.

### 15. Über Kurven vom Maximal-Klassenindex mit ineinanderliegenden Ovalen.

Auf die Frage, wie viele Ovale höchstens eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex haben kann, von denen das erste innerhalb des zweiten, dieses innerhalb des dritten usw. liegt, gibt auf Grund des Satzes 12 der folgende Satz Antwort:

XV. *Eine Kurve  $3k-1$ -ter,  $3k$ -ter oder  $3k+1$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex kann höchstens  $k$  im Endlichen liegende Ovale haben, von denen das erste im Innern des zweiten, das zweite innerhalb des dritten usw. liegt.*

*Es gibt für jede ganze Zahl  $k > 0$  eine Kurve  $3k-1$ ,  $3k$ - bzw.  $3k+1$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die  $k$  Ovale hat, deren erstes innerhalb des zweiten, deren zweites innerhalb des dritten liegt, usw.*

Wenn der Satz unwahr wäre, so gäbe es eine Kurve  $3k-1$ ,  $3k$ - oder  $3k+1$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die wenigstens  $k+1$  solche Ovale hat, deren erstes innerhalb des zweiten, deren zweites innerhalb des dritten usw. liegt.

Man kann das äußerste der  $k+1$  Ovale ( $M_0$ ), das die übrigen  $k$  im Innern enthält, in das Endliche projizieren. Weil die eine Grenzlinie des Gebietes (d. h.  $M_0$ ), welches von dem Ovale  $M_0$  und von dem äußersten ( $M_1$ ) der übrigen  $k$  Ovale begrenzt wird — von den Punkten des Gebietes aus gesehen —, aus konkaven Elementarbögen, die andere,  $M_1$ , aus konvexen Elementarbögen, besteht, so muß nach dem Satze V ein Zug in das Innere des Gebietes fallen, der — von den Punkten des Ovals  $M_0$  aus gesehen — aus lauter konkaven Elementarbögen besteht. Dieser Zug kann kein Oval sein, sein Klassenindex ist also wenigstens Eins.

Aus ähnlichen Gründen muß zwischen das Oval  $M_1$  und das äußerste der übrigen  $k-1$  Ovale ein Zug fallen, dessen Klassenindex wenigstens Eins ist, usw.

Aus einem Punkte des äußersten Ovals gehen  $2(k+1)$  Tangenten an die  $k+1$  Ovale, wenigstens  $k$  Tangenten an die Züge, die zwischen den  $k+1$  Ovalen liegen, und somit wenigstens  $3k+2$  Tangenten an die Kurve. Dies ist aber eine Unmöglichkeit.

Durch einen ähnlichen Beweisgang beweist man auf Grund des Satzes 13 den folgenden Satz:

XVI. Die maximale Anzahl der ineinanderliegenden Ovale einer Kurve vom Maximal-Klassenindex, die aus  $r$  Zügen besteht, ist  $\left[ \frac{r+1}{2} \right]$ , wo das Klammerzeichen die größte Ganze aus der in ihm enthaltenen Zahl bedeutet.

Es gibt für jede ganze positive Zahl  $r$  Kurven vom Maximal-Klassenindex, die aus  $r$  Zügen bestehen, von denen  $\left[ \frac{r+1}{2} \right]$  solche Ovale sind, deren erstes innerhalb des zweiten, das zweite innerhalb des dritten usw. liegt.

### Drittes Kapitel.

## Über die Reduzibilität und Irreduzibilität reeller Kurven. Reduzible und irreduzible Kurven vom Maximal-Klassenindex.

### 16. Der Begriff der Irreduzibilität und Reduzibilität für reelle Kurven.

Wir sagen, daß eine aus zwei oder mehreren Zügen bestehende Kurve  $C$   $n$ -ter Klasse bezüglich der Realität *reduzibel*, oder kurz *reduzibel* sei, wenn man ihre Züge in zwei oder mehrere Gruppen so einteilen kann, daß die Summe der Klassen der Kurven, die von den Zügen je einer Gruppe gebildet werden, der Klasse der Kurve  $C$  gleich ist.

Etwas anders ausgedrückt sagen wir, daß die Kurve  $C$   $n$ -ter Klasse *reduzibel*, *zerfallend* ist und in die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$   $n_1$ -ter,  $n_2$ -ter ..., bzw.  $n_k$ -ter Klasse zerfällt, wenn

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

ist und die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  zusammen jeden Zug der Kurve  $C$  enthalten und zwar jeden Zug nur einmal.

Wenn die Kurve nur einen Zug hat, oder wenn das Zerfallen der Kurve bei keinerlei Einteilung der Züge eintritt, nennen wir die Kurve  $C$  *irreduzibel* oder *einfach*.

Entsprechend läßt sich die Reduzibilität und Irreduzibilität auch für ebene Kurven  $n$ -ter Ordnung und für Raumkurven  $n$ -ter Klasse oder  $n$ -ter Ordnung definieren.

Es ist klar, daß eine Kurve  $n$ -ter Klasse, die auch einen Punkt als Zug hat, oder eine Kurve  $n$ -ter Ordnung, die einen Geradenzug hat, *reduzibel* ist. Um diese trivialen Reduzibilitätsfälle auszuschließen, nehmen wir auch im folgenden an, daß kein Zug der ebenen Kurve ein Punkt oder eine Gerade ist.

Unsere Definition der Reduzibilität und Irreduzibilität fällt mit dem Begriff der Reduzibilität und Irreduzibilität der algebraischen Kurven

nicht zusammen. Eine nach algebraischem Gesichtspunkte irreduzible Kurve kann hinsichtlich der Realität reduzibel sein und umgekehrt kann eine hinsichtlich der Realität irreduzible Kurve algebraisch reduzibel sein. Z. B.: Eine algebraisch irreduzible algebraische Kurve vierter Ordnung und vierter Klasse, die aus zwei Ovalen besteht (es gibt solche Kurven auch unter den sogenannten Cassinischen Kurven), ist nach dem Gesichtspunkte der Realität reduzibel und zerfällt in zwei Ovale. Eine aus einer Ellipse und einer in ihrem Innern liegenden dreispitzigen Hypozykloide (Steinerschen Hypozykloide) bestehende algebraische Kurve, die hinsichtlich der Realität dritter Klasse ist, ist algebraisch reduzibel, bezüglich der Realität aber irreduzibel.

### 17. Topologisches Kriterium der Irreduzibilität einer Kurve vom Maximal-Klassenindex.

Für die Reduzibilität der Kurven vom Maximal-Klassenindex behaupten wir den folgenden Satz:

XVII. *Ist eine Kurve vom Maximal-Klassenindex reduzibel, so sind die Kurven, in welche sie zerfällt, wieder vom Maximal-Klassenindex.*

Wäre nämlich der Satz unwahr, so gäbe es eine Kurve  $C$   $n$ -ter Klasse, die in die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$ ,  $n_1$ -ter,  $n_2$ -ter,  $\dots$ ,  $n_k$ -ter Klasse zerfällt, unter denen wenigstens eine Kurve  $C_i$  nicht vom Maximalindex ist. Es gäbe also einen Punkt  $P$  der Ebene, aus welchem an die Kurve  $C_i$   $n_i - 4$ , an die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_k$  höchstens  $n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_k$  Tangenten gingen. Aus dem Punkte  $P$  gingen also an die Kurve  $C$   $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex höchstens

$$n_i - 4 + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} + n_{i+1} + \dots + n_k = n - 4$$

Tangenten, also wäre die Kurve  $C$  nicht vom Maximal-Klassenindex.

XVIII. *Eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex ist nur dann irreduzibel, wenn die Punkte, aus denen an die Kurve die minimale (d. h. mit dem Klassenindex gleiche) Anzahl der Tangenten geht, einen zusammenhängenden Bereich bilden.*

Wir zeigen erst, daß die Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex irreduzibel ist, wenn die Punkte, aus denen die minimale Anzahl der Tangenten an sie geht, ein zusammenhängendes Gebiet  $T$  bilden.

Jeder Zug der Kurve  $C$   $n$ -ter Klasse gehört (bei dieser Annahme) der Grenze des Bereiches  $T$  an. Aus einem Punkte des Bereiches  $T$  geht an jeden Zug die mit dem Klassenindex des Zuges gleiche Anzahl der Tangenten. Wenn man nämlich an einen Zug eine mit seiner Klasse

gleiche Anzahl von Tangenten ziehen könnte, so könnte man über einen Punkt dieses Zuges aus dem Bereiche  $T$  hinaus zu einem Punkte gelangen, aus welchem an die Kurve  $C$  zwei Tangenten weniger gehen. Der Klassenindex der Kurve wäre dann kleiner als  $n - 2$ . Dies widerspricht der Annahme, daß die Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex ist.

Daraus folgt, daß aus einem Punkte, der außerhalb des Gebietes  $T$  liegt, an einen und nur einen Zug die maximale Anzahl der Tangenten geht. Wenn wir die Züge der Kurven  $C$  in zwei oder mehrere Kurven  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) einteilen, so kann man aus einem Punkte der Ebene höchstens an eine der Kurven  $C_i$  die maximale Anzahl der Tangenten ziehen, während die Anzahl der Tangenten aus diesem Punkte an irgendeine der übrigen Kurven der Summe der Klassenindizes ihrer Züge gleich ist. Diese Anzahl ist also bestimmt kleiner, als die Klasse der entsprechenden Kurve. Daraus folgt, daß die Summe der Klassen der Kurven  $C_i$  immer größer ist, als die Klasse der Kurve  $C$ , d. h. die Kurve  $C$  ist irreduzibel.

Wir müssen noch beweisen, daß die Punkte, aus denen die minimale Anzahl der Tangenten an eine Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex geht, einen zusammenhängenden Bereich bilden, wenn die Kurve irreduzibel ist.

Wäre dieser Satz unrichtig, so gäbe es eine Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex, für welche die Punkte, aus denen die minimale Anzahl der Tangenten zu ihr geht, wenigstens zwei miteinander nicht zusammenhängende Gebiete bilden. Wir bezeichnen den einen in sich zusammenhängenden dieser Bereiche mit  $T_1$ , die Kurve, die von den zur Grenze des Gebietes  $T_1$  zugehörigen Zügen der Kurve  $C$  gebildet wird, mit  $C_1$ , die aus den übrigen Zügen bestehende Kurve mit  $C_2$ , und bezeichnen ferner die Klassen der Kurven  $C$ ,  $C_1$  bzw.  $C_2$  mit  $n$ ,  $n_1$  bzw.  $n_2$ . Aus dem bisherigen folgt, daß die Kurve  $C_1$  vom Maximal-Klassenindex ist. Aus einem Punkte der Ebene gehen  $n_1 - 2$  bzw.  $n_1$  Tangenten an die Kurve  $C_1$ , je nachdem er innerhalb oder außerhalb des Gebietes  $T_1$  liegt.

Aus einem Punkte des Gebietes  $T_1$  kann man an die Kurve  $C$   $n - 2$  Tangenten und somit an die Kurve  $C_2$   $\bar{n}_2 = n - 2 - (n_1 - 2) = n - n_1$  Tangenten ziehen. Aus einem Punkte, der außerhalb des Gebietes  $T_1$  liegt, gehen entweder  $n$  oder  $n - 2$  Tangenten an die Kurve  $C$  und somit entweder  $\bar{n}_2 = n - n_1$  oder  $\bar{n}_2 - 2 = n - 2 - n_1$  Tangenten an die Kurve  $C_2$ . Daraus folgt, daß die Klasse der Kurve  $C_2$   $n_2 = n - n_1$  ist, und deshalb die Kurve  $C$  gegen unsere Annahme reduzibel ist; sie zerfällt in die Kurven  $C_1$  und  $C_2$ .

Hiermit ist der Satz XVIII vollständig bewiesen.

# 18. Topologisches Kriterium der Reduzibilität einer Kurve vom Maximal-Klassenindex.

XIX. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex in  $k$  irreduzible Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  zerfällt, ist, daß die Punkte, aus denen an die Kurve  $C$  die minimale Anzahl der Tangenten geht,  $k$  und nur  $k$  voneinander verschiedene, in sich zusammenhängende Gebiete bilden. Bezeichnet man mit  $T_1, T_2, \dots, T_k$  diese  $k$  Gebiete, so kann man ihre Reihenfolge so wählen, daß die Züge der Kurve  $C$ , von denen das Gebiet  $T_i$  begrenzt wird, die Kurve  $C_i$  bilden ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Bilden die Punkte, aus denen die minimale Anzahl der Tangenten an die Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex geht,  $k$  zusammenhängende Gebiete  $T_1, T_2, \dots, T_k$  und bezeichnet  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) die Kurve, die von zur Grenze des Gebietes  $T_i$  gehörigen Zügen gebildet wird, so ist nach dem vorigen Satze klar, daß die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  irreduzibel sind.

Wir müssen beweisen, daß die Kurve  $C$  in die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  zerfällt, d. h. daß  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  ist, wenn  $n, n_1, n_2, \dots, n_k$  die Klassen der Kurven  $C, C_1, C_2, \dots, C_k$  sind.

Aus dem Beweise des zweiten Teiles des vorigen Satzes folgt, daß die Kurve  $C$  in die Kurven  $C_1$  und  $\bar{C}_1$  zerfällt, wo die Klasse der Kurve  $\bar{C}_1$   $\bar{n}_1 = n - n_1 = n_2 + n_3 + \dots + n_k$  ist. Die Kurve  $\bar{C}_1$  zerfällt aus demselben Grunde in die Kurven  $C_2$  und  $\bar{C}_2$  und die Klasse von  $\bar{C}_2$  ist

$$\bar{n}_2 = \bar{n}_1 - n_2 = n_3 + n_4 + \dots + n_k.$$

Wir finden endlich mit diesem Verfahren, daß die Kurve  $C$  in die irreduziblen Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  zerfällt. Der Satz XIX ist bewiesen, wenn wir noch bestätigen, daß eine Kurve vom Maximal-Klassenindex in irreduzible Kurven nur auf eine Weise zerfallen kann.

Wir nehmen an, daß diese Behauptung unrichtig ist, d. h. daß die Kurve  $C$ , die vorher in die irreduziblen Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  zerlegt wurde, in irreduzible Kurven auch auf andere Weise zerfallen kann. Bezeichnen wir die irreduziblen Kurven bzw. ihre Klassen, in welche die Kurve  $C$  in dem zweiten Falle zerfällt, mit  $G_1, G_2, \dots, G_h$  bzw. mit  $m_1, m_2, \dots, m_h$ , so ist  $n = m_1 + m_2 + \dots + m_h$ . Ist die Klasse der Kurve  $\bar{G}_1$ , die aus den Kurven  $G_2, G_3, \dots, G_h$  besteht, so ist nach den vorigen  $n = m_1 + \bar{m}_1$  (wie vorher  $n = n_1 + \bar{n}_1$  war).

Die Kurve  $G_1$  ist irreduzibel und nach dem Satz XVII vom Maximal-Klassenindex, also bilden die Punkte, aus denen an sie die minimale Anzahl von Tangenten geht, einen zusammenhängenden Bereich  $B$ , dessen

Grenze von den Zügen und eventuell von der einzigen Wendetangente der Kurve  $G_1$  gebildet wird.

Der Bereich  $B$  kann keine Punkte haben, die außerhalb der Gebiete  $T_1, T_2, \dots, T_k$  liegen. Hätte nämlich der Bereich  $B$  einen Punkt  $P$ , der außerhalb der Gebiete  $T_1, T_2, \dots, T_k$  liegt, so gehen aus  $P$   $n$  bzw.  $m_1 - 2$  Tangenten an die Kurve  $C$  bzw.  $G_1$  und höchstens  $\bar{m}_1$  Tangenten an die Kurve  $G$ . Daraus könnte man folgern, daß  $n \leq m_1 - 2 + \bar{m}_1$  ist, was der Gleichung  $n = m_1 + \bar{m}_1$  widerspricht.

Auf Grund dessen (weil das Gebiet  $B$  zusammenhängend ist und kein Zug oder keine eventuelle Wendetangente der Kurve  $G$  im Innern eines der Gebiete  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) liegt), folgt, daß der Bereich mit einem der Gebiete  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) zusammenfallen muß, und somit die Kurve  $G_1$  mit einer der Kurven  $C_i$  zusammenfällt. Man kann ähnliches für die Kurven  $G_2, G_3, \dots, G_k$  behaupten.

Damit ist bewiesen, daß man eine Kurve vom Maximal-Klassenindex in irreduzible Kurven nur auf eine Weise zerlegen kann, womit der Satz XIX bewiesen ist.

Der Satz XIX enthält noch den folgenden Satz:

XX. *Eine Kurve vom Maximal-Klassenindex ist dann und nur dann reduzibel, wenn die Punkte, aus denen an sie die minimale Anzahl von Tangenten geht, wenigstens zwei miteinander nicht zusammenhängende Bereiche bilden.*

#### 19. Arithmetische Kriterien der Irreduzibilität und Reduzibilität der Kurven vom Maximal-Klassenindex.

XXI. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Irreduzibilität einer Kurve vom Maximal-Klassenindex ist, daß die Summe der Klassenindizes ihrer Züge mit dem Klassenindex der Kurve gleich sei, oder mit anderen Worten, daß die Kurve die maximale Summe der Klassenindizes ihrer Züge habe.*

Wenn die Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex irreduzibel ist, so geht die minimale Anzahl von Tangenten an jeden ihrer Züge aus den Punkten, aus denen die minimale Anzahl von Tangenten an die Kurve  $C$  geht, wie wir durch Satz XVIII bewiesen haben. Bezeichnet  $i$  den Klassenindex der Kurve  $C$  und sind  $i_1, i_2, \dots, i_r$  die Klassenindizes ihrer Züge, so ist

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_r,$$

d. h. die Kurve hat die maximale Summe der Klassenindizes ihrer Züge.

Eine reduzible Kurve kann nicht die maximale Summe der Klassenindizes ihrer Züge haben.

Wenn nämlich die Kurve vom Maximal-Klassenindex  $C$  in die irreduziblen Kurven  $C_1, C_1, \dots, C_k$  zerfällt, deren Klassen bzw. Klassenindizes  $n_1, n_2, \dots, n_k$  bzw.  $i'_1, i'_2, \dots, i'_k$  sind, so ist

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Weil die Kurven  $C, C_1, C_2, \dots, C_k$  vom Maximal-Klassenindex sind, ist

$$n = i + 2, \quad n_1 = i'_1 + 2, \quad n_2 = i'_2 + 2, \quad \dots, \quad n_k = i'_k + 2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß

$$i = i'_1 + i'_2 + \dots + i'_k + 2(k-1) = i_1 + i_2 + \dots + i_r + 2(k-1)$$

ist, weil der Klassenindex je einer der irreduziblen Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  mit der Summe der Klassenindizes ihrer Züge gleich ist.

Aus der letzten Gleichung folgt, daß eine Kurve vom Maximal-Klassenindex, die die maximale Summe der Klassenindizes ihrer Züge hat, nicht reduzibel sein kann.

Wir können dem Satze XIX entsprechend den folgenden Satz aussprechen:

XXII. *Eine Kurve vom Maximal-Klassenindex zerfällt dann und nur dann in  $k$  irreduzible Kurven, wenn der Klassenindex der Kurve um  $2(k-1)$  größer ist als die Summe der Klassenindizes ihrer Züge.*

Wir haben vorher bewiesen, daß der Klassenindex einer in  $k$  irreduzible Kurven zerfallenden Kurve vom Maximal-Klassenindex um  $2(k-1)$  größer ist, als die Summe der Klassenindizes ihrer Züge, jetzt müssen wir die Umkehrung dieses Satzes rechtfertigen.

Ist der Klassenindex einer Kurve vom Maximal-Klassenindex um  $2(k-1) > 0$  größer, als die Summe der Klassenindizes ihrer Züge, so kann die Kurve nicht irreduzibel sein. Aus dem Satze XIX folgt, daß eine reduzible Kurve vom Maximal-Klassenindex nur auf eine Weise in irreduzible Kurven zerlegt werden kann und deshalb muß die Kurve in gerade  $k$  irreduzible Kurven zerfallen.

Dem Satze XX entspricht der folgende:

XXIII. *Eine Kurve vom Maximal-Klassenindex ist dann und nur dann reduzibel, wenn ihr Klassenindex größer ist, als die Summe der Klassenindizes ihrer Züge.*



## 20. Einige Sätze über irreduzible und reduzible Kurven vom Maximal-Klassenindex.

Für die Kurven vom Maximal-Klassenindex gelten noch die folgenden Sätze:

XXIV. *Hat eine algebraische bezüglich der Realität irreduzible Kurve dieselbe Realitäts- und algebraische Klasse, so ist die Kurve auch algebraisch irreduzibel.*

Die Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen unrichtig; z. B.: eine aus zwei Ovalen bestehende Cassinische Kurve vierter Klasse ist vom Maximal-Klassenindex und algebraisch irreduzibel, aber bezüglich der Realität reduzibel.

Der Satz XXIV folgt aus dem Satze XXI und aus seinem Beweis.

Zerfällt nämlich die algebraische Kurve  $C$  — deren algebraische und Realitäts-Klasse dieselbe,  $n$ , ist — algebraisch in die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  ( $k > 1$ )  $n_1$ -ter,  $n_2$ -ter,  $\dots$ ,  $n_k$ -ter Klasse, so ist

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Diese Gleichung kann aber nicht bestehen, wenn die Kurve vom Maximal-Klassenindex und bezüglich der Realität irreduzibel ist. Damit ist der Satz XXIV bewiesen.

Für reduzible algebraische Kurven gilt der folgende Satz:

XXV. *Hat eine algebraische und algebraisch reduzible Kurve vom Maximal-Klassenindex dieselbe algebraische und Realitäts-Klasse, so ist die Kurve auch bezüglich der Realität reduzibel.*

Der Beweis ist analog dem vorhergehenden.

XXVI. *Eine irreduzible Kurve vom Maximal-Klassenindex, die aus  $k$  ( $\geq 2$ ) Zügen besteht, bleibt auch dann irreduzibel und vom Maximal-Klassenindex, wenn man  $s$  ( $< k$ ) ihrer Züge wegläßt.*

Aus einem beliebigen Punkte der Ebene geht die maximale Anzahl der Tangenten höchstens an einen Zug einer irreduziblen Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex. Dasselbe gilt auch für eine Kurve  $C_1$ , die aus einer beliebigen Anzahl von Zügen der Kurve  $C$  besteht, woraus folgt, daß die Kurve  $C_1$  irreduzibel und vom Maximal-Klassenindex ist.

Für reduzible Kurven vom Maximal-Klassenindex gilt der folgende entsprechende Satz:

XXVII. *Die Ebene wird durch die Züge und durch die eventuelle Wendetangente einer aus  $r$  Zügen bestehenden Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex in  $r + 1$  verschiedene Gebiete  $T_1, T_2, \dots, T_{r+1}$  zerlegt. Wenn man die Züge, von denen die Grenzen beliebiger  $s$  der  $r + 1$  Gebiete*



$T_1, T_2, \dots, T_{r+1}$  gebildet werden, wegläßt, so bilden die übrigbleibenden Züge der Kurve  $C$  eine Kurve vom Maximal-Klassenindex.

Bezeichnen wir die Klasse der Kurve  $C$  mit  $n$ , die Anzahl der Tangenten, die aus einem außerhalb des Gebietes  $T_i$  liegenden Punkte  $P$  an die Begrenzungslinien des Gebietes gehen, mit  $m_i$ , so gehen aus  $P$  entweder  $n - m_i$  oder  $n - m_i - 2$  Tangenten an die von den übrigen Zügen der Kurve  $C$  gebildete Kurve  $\bar{C}_i$ . Die Anzahl der Tangenten an die Kurve  $\bar{C}_i$  verändert sich nur dann, wenn der Punkt entweder die Kurve  $\bar{C}_i$  oder ihre Wendetangente überschreitet; sie bleibt aber unverändert, wenn er in das Gebiet  $T_i$  über eine seiner Grenzen gelangt. Daraus folgt, daß die Klasse bzw. der Klassenindex der Kurve  $\bar{C}_i$   $n - m_i$  bzw.  $n - m_i - 2$  ist, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

## 21. Das Geschlecht einer Kurve vom Maximal-Klassenindex.

Auf Grund des Zusammenhanges des einer irreduziblen Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex zugehörigen Gebietes  $T$  — aus dessen Punkten an die Kurve die minimale Anzahl der Tangenten geht — läßt sich das Geschlecht der Kurve definieren. Ist das Gebiet  $T$   $p + 1$ -fach zusammenhängend, so hat die Kurve das Geschlecht  $p$ .

Ist die Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex reduzibel und zerfällt sie in die irreduziblen Kurven  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(k)}$  mit den Geschlechtern  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , so wird das Geschlecht der Kurve — den algebraischen Kurven entsprechend — durch die Gleichung

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1$$

definiert.

Für das Geschlecht einer Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex gelten die Sätze:

XXVIII. Das Geschlecht einer irreduziblen Kurve vom Maximal-Klassenindex, die aus  $k$  Zügen besteht, ist entweder  $k$  oder  $k - 1$ .

XXIX. Eine irreduzible Kurve vom Maximal-Klassenindex und vom Geschlechte  $p$  hat entweder  $p$  oder  $p + 1$  Züge.

Die projektive Ebene ist — wie bekannt — eine geschlossene einseitige Fläche (vom Zusammenhange 1), die sich längs eines (einrandigen) Rückkehrschnittes in eine zweiseitige einfach zusammenhängende Fläche zerschneiden läßt.

Hat die irreduzible Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex  $k$  Züge, so hat das Gebiet  $T$   $k$  Ränder:  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Jeder Zug von  $C$  ist ein Rand des Gebietes  $T$ , mit Ausnahme des Zuges mit Wendepunkte, der mit seiner Wendetangente zusammen einen Rand von  $T$  bildet.

Das Gebiet  $T$  ist zusammenhängend, also können die Ränder  $C_1$  und  $C_2$ ,  $C_2$  und  $C_3$ , usw.  $C_{k-1}$  und  $C_k$  mit je einem Querschnitte  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ) so verbunden werden, daß je zwei der Querschnitte einander nicht treffen und so das Gebiet  $T$  nicht zerfällt.

Bezeichnet  $T_1$  das längs der Querschnitte  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ) zerschnittene Gebiet  $T$ , so hat  $T_1$  nur einen Rand. Ist  $T_1$  einfach zusammenhängend, so ist  $T$   $k$ -mal zusammenhängend.

Hat das Gebiet  $T_1$  einen nicht zerstückelnden Querschnitt  $q_k$  und sind  $Q_1$  und  $Q_2$  zwei gegenüberliegende Punkte an den zwei Ufern von  $q_k$ , so kann man von  $Q_1$  ausgehend bis  $Q_2$  längs einer Kurve  $\Gamma$  gelangen, die im Gebiete  $T_1$  liegt und den Querschnitt  $q_k$  nicht überschreitet.

Werden die zwei Ufer von  $q_k$  vereinigt, so wird die Kurve  $\Gamma$  ein Rückkehrschnitt, von dem das Gebiet  $T$  nicht zerstückelt wird. Sind  $P_1$  und  $P_2$  zwei auf der Linie  $q_k$  und zugleich an den zwei Ufern von  $\Gamma$  liegende Punkte, so kann man im Gebiete  $T_1$  von  $P_1$  nach  $P_2$  längs  $q$  und des einzigen Randes von  $T_1$  gelangen, ohne den Rückkehrschnitt  $\Gamma$  zu überschreiten.  $\Gamma$  ist also ein nicht zerstückelnder Rückkehrschnitt der projektiven Ebene.

Schneidet man längs des Rückkehrschnittes  $\Gamma$  das Gebiet  $T_1$  auf, so hat das entstandene Gebiet  $T_2$  denselben Zusammenhang, wie  $T_1$ . Der Zusammenhang von  $T_1$  nimmt nämlich durch das Herausheben eines Punktes von  $\Gamma$  um Eins zu, und nachher durch das Zerschneiden längs  $\Gamma$  um Eins ab.

Verbindet man im Gebiete  $T_2$  einen Punkt von  $\Gamma$  mit einem Punkte des Randes von  $T_1$  durch einen Querschnitt  $q'_1$ , so wird das Gebiet  $T_2$  dadurch ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $T_3$  werden, welches nur einen Rand hat.

Hätte das Gebiet  $T_3$  einen nicht zerstückelnden Querschnitt  $q_{k+1}$ , so gäbe es im Gebiete  $T_3$  einen nicht zerstückelnden Rückkehrschnitt  $\Gamma_1$ , also hätte die projektive Ebene zwei nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte  $\Gamma$  und  $\Gamma_1$ , die keinen gemeinsamen Punkt haben. Dies ist aber unmöglich. Daraus folgt, daß das Gebiet  $T_3$  einfach und das Gebiet  $T$   $k+1$ -fach zusammenhängend sind.

Damit sind die Sätze XXVIII und XXIX bewiesen.

Aus dem Satze XIX folgt der folgende:

XXX. Eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex, die aus der maximalen Anzahl der Züge  $(n-1)$  besteht, ist vom Geschlechte  $n-2$ .

Wir können für eine Kurve vom Maximal-Klassenindex ein anderes Geschlecht  $\pi$  definieren. Sind  $n, w, t$  die Klasse, die Anzahlen der Wendetangenten und der Doppeltangenten, so ist

$$\pi = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - w - t.$$

Diese zwei Geschlechter  $p$  und  $\pi$  sind für eine Kurve vom Maximal-Klassenindex, die die maximale Anzahl der Züge hat, gleich. Die Frage, ob die zwei Geschlechter für eine andere Kurve vom Maximal-Klassenindex zusammenfallen müssen, muß ich offen lassen.

## 22. Relative Irreduzibilität und Reduzibilität reeller Kurven.

Wir werden im folgenden für die relative Irreduzibilität und Reduzibilität einer Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex Kriterien bestimmen.

Wir nehmen an, daß die Kurve  $C$   $n$ -ter Klasse aus den Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$   $n_1$ -ter,  $n_2$ -ter,  $\dots$ ,  $n_k$ -ter Klasse besteht, die nicht irreduzibel sein müssen. Wir nennen die Kurve  $C$  in bezug auf die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  *reduzibel*, oder kurz *relativ reduzibel*, wenn die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sich in zwei oder mehrere Gruppen so einteilen lassen, daß die Summe der Klassen der Kurven, die aus je einer Gruppe der Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  bestehen, mit der Klasse  $C$  gleich ist.

Ist diese Zerlegung der Kurve unmöglich, so nennen wir die Kurve bezüglich der Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  *relativ irreduzibel*. Aus der Definition folgt, daß eine (absolut) irreduzible Kurve für jedes Kurvensystem  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , welches von ihren Zügen gebildet wird, auch relativ irreduzibel und eine relativ reduzible Kurve auch absolut reduzibel sein muß.

Wir können die relative Reduzibilität und Irreduzibilität analog für Kurven  $n$ -ter Ordnung und für Raumkurven  $n$ -ter Klasse oder Ordnung definieren.

Wir können den folgenden Satz behaupten, der den Sätzen XVII und XVIII entspricht.

XXXI. Eine Kurve  $n$ -ter Klasse  $C$  vom Maximal-Klassenindex ist dann und nur dann irreduzibel bezüglich der Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , die zusammen jeden Zug der Kurve  $C$  einmal und nur einmal enthalten, wenn die Punkte, aus denen an  $C$  die minimale Anzahl der Tangenten geht, ein im folgenden Sinn zusammenhängendes Gebiet bilden.

Sind die Gebiete, aus deren Punkten die minimale Anzahl der Tangenten an die Kurve  $C$  gehen,  $T_1, T_2, \dots, T_s$ , so betrachten wir zwei dieser Gebiete als miteinander zusammenhängend, wenn ihre Grenzlinien je einen Zug einer der Kurven  $C_i$  enthalten. Wir stellen den Zusammenhang uns auf die einfachste Weise so vor, daß wir die Züge je einer Kurve  $C_i$ , wenn sie nicht Grenzlinien eines Gebietes  $T$  sind, durch Brücken verbinden, die aus der Ebene austreten und einander nicht treffen.

Die Kurve  $C$  ist bezüglich der Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  dann und nur dann reduzibel, wenn die Punkte, aus denen die minimale Anzahl der

*Tangenten an die Kurve  $C$  gehen, wenigstens zwei in obigem Sinne nicht zusammenhängende Bereiche bilden. Ist die Anzahl der nicht zusammenhängenden Bereiche  $r$ , so zerfällt die Kurve  $C$  bezüglich der Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  in  $r$  irreduzible Kurven.*

Das arithmetische Kriterium der relativen Reduzibilität der Kurve  $C$  ist das folgende:

XXXII. Die Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximal-Klassenindex  $C$  zerfällt bezüglich der Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  dann und nur dann in  $h$  relativ irreduzible Kurven, wenn ihr Klassenindex um  $2(h-1)$  größer ist als die Summe der Klassenindizes der Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$ .

Diese Sätze entsprechen den Sätzen XIX und XXII.

Sind  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  die Kurven, die aus den Grenzlinsen je eines der Gebiete  $T_1, T_2, \dots, T_n$  gebildet werden, so können wir die Kurve  $C$  bezüglich der Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  in der folgenden Weise zerlegen.

Sind  $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \dots, \Gamma_{n_1-1}^{(1)}$  diejenigen der Kurven  $\Gamma$ , die keinen Zug der  $C_1$  enthalten, und ist  $\Gamma_{n_1}^{(1)}$  die von den übrigen Kurven  $\Gamma$  gebildete Kurve, so ist die Zerlegung der Kurve  $C$  bezüglich  $C_1$ :  $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \dots, \Gamma_{n_1}^{(1)}$ . Bezeichnen  $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}, \dots, \Gamma_{n_2-1}^{(2)}$  diejenigen der Kurven  $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \dots, \Gamma_{n_1}^{(1)}$ , die keinen Zug von  $C_2$  haben, und ist  $\Gamma_{n_2}^{(2)}$  die Kurve, die von den übrigen Kurven  $\Gamma^{(1)}$  gebildet ist, so zerfällt die Kurve  $C$  bezüglich  $C_1$  und  $C_2$  in die Kurven  $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}, \dots, \Gamma_{n_2}^{(2)}$ . Wir können dieses Verfahren weiter fortsetzen. Auf Grund desselben kann man den Satz XXXI leicht einsehen. Der Beweis des Satzes XXXII ist auch nicht schwer.

Ist die Kurve  $C$  algebraisch, so kann man die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  so wählen, daß die Begriffe der relativen Reduzibilität und Irreduzibilität in bezug auf die Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_k$  mit den Begriffen der algebraischen Reduzibilität und Irreduzibilität zusammenfallen.

## Viertes Kapitel.

### Über Kurven vom Maximalindex.

#### 23. Allgemeine Sätze.

Auf Grund der für Kurven vom Maximal-Klassenindex bewiesenen Sätze kann man durch das Prinzip der Dualität für die Kurven vom Maximalindex entsprechende Sätze ohne Schwierigkeiten behaupten. Wir werden die meisten dieser Sätze angeben, weil man bisher nur Sätze für die Kurven vom Maximalindex ausgesprochen oder bewiesen hat, ferner deshalb, weil diese Sätze uns für den Beweis entsprechender Sätze über die Flächen vom Maximalindex notwendig erscheinen.

Den Sätzen I—IV entsprechen die folgenden:

XXXIII. *Der maximale Index einer (von  $n$  Geraden verschiedenen) Kurve  $n$ -ter Ordnung ist  $n - 2$ .*

XXXIV. *Eine Kurve vom Maximalindex hat keine Doppeltangente mit verschiedenen Berührungspunkten, sie hat nicht mehr als eine Spitze. Hat die Kurve eine Spitze, so hat sie außer der Spitzentangente keine durch die Spitze hindurchgehende Tangente.*

XXXV. *Eine Kurve  $n$ -ter Ordnung wird von jeder Tangente und von jeder durch ihre eventuelle Spitze hindurchgehenden Gerade in  $n$  Punkten getroffen.*

XXXVI. *Jeder Zug einer Kurve vom Maximalindex ist wieder eine Kurve vom Maximalindex.*

Diese vier Sätze wurden teilweise, aber ohne Beweis auch von H. Mohrmann ausgesprochen. Den vierten Satz spricht Mohrmann mit der Berufung auf den Verfasser aus, obgleich der Satz vom Verfasser nur für solche Kurven vom Maximalindex bewiesen worden war, für welche die Summe der Indizes der Züge mit dem Index der Kurve gleich ist.

#### 24. Irreduzible Kurven vom Maximalindex.

Für irreduzible Kurven vom Maximalindex gelten die folgenden Sätze:

Aus den Sätzen XXI, XXVI, VI, VII und VIII folgen die folgenden:

XXXVII. *Eine (von  $n$  Geraden verschiedene) Kurve  $n$ -ter Ordnung vom Maximalindex ist dann und nur dann irreduzibel, wenn die Summe der Indizes ihrer Züge  $n - 2$  ist.*

XXXVIII. *Eine aus  $k$  Zügen bestehende Kurve vom Maximalindex bleibt auch dann irreduzibel und vom Maximalindex, wenn man  $s (< k)$  ihrer Züge wegläßt.*

XXXIX. *Eine irreduzible Kurve vom Maximalindex kann höchstens ein Oval haben.*

XL. *Das Maximum der Anzahl der unpaaren Züge einer Kurve  $n$ -ter Ordnung (deren Züge keine Geraden sind) ist  $n - 2$ . Hat eine Kurve  $n$ -ter Ordnung  $n - 2$  unpaare Züge, so sind sie alle dritter Ordnung und außer diesen kann die Kurve nur ein Oval haben.*

XLI. *Eine Kurve  $n$ -ter Ordnung mit  $n - 2$  unpaaren Zügen hat wenigstens  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  Doppelpunkte. Je zwei verschiedene unpaare Züge schneiden einander in je einem dieser Doppelpunkte. Die Kurve hat außer diesen Doppelpunkten keine anderen, wenn sie noch ein Oval hat; sie kann aber noch einen und nur einen Doppelpunkt haben, wenn*

das Oval nicht auftritt. In diesem letzten Doppelpunkte schneidet sich ein unpaarer Zug<sup>14a)</sup>.

Man kann alle diese Möglichkeiten für alle  $n > 2$  verwirklichen.

Das Oval, welches in den letzten drei Sätzen eine Rolle spielt, liegt im Endlichen, wenn das Oval der Kurve vom Maximal-Klassenindex — deren polare Figur in bezug auf einen Kreis die Kurve vom Maximalindex ist — den Mittelpunkt dieses Kreises in seinem Inneren enthält.

Das Geschlecht der Kurve vom Maximalindex kann als das Geschlecht ihrer polaren Figur definiert werden. Auf Grund der Sätze XXVIII, XXIX und XXX gelten die folgenden Sätze:

XLII. Eine irreduzible Kurve vom Maximalindex, die vom Geschlechte  $p$  ist, hat entweder  $p$  oder  $p + 1$  Züge. Das Geschlecht einer irreduziblen Kurve vom Maximalindex, die aus  $k$  Zügen besteht, ist entweder  $k$  oder  $k - 1$ .

XLIII. Das Geschlecht einer Kurve  $n$ -ter Ordnung vom Maximalindex, die aus der maximalen Anzahl der Züge besteht, ist  $n - 2$ .

## 25. Reduzible Kurven vom Maximalindex.

Für die reduzierbaren Kurven vom Maximalindex gelten die folgenden Sätze:

Auf Grund der Sätze XXII und XVII folgt:

XLIV. Eine Kurve vom Maximalindex zerfällt dann und nur dann in  $k$  irreduzible Kurven, wenn der Index der Kurve um  $2(k - 1)$  größer ist als die Summe der Indizes ihrer Züge. Die Kurven, in welche die Kurve zerfällt, sind wieder vom Maximalindex.

Aus den Sätzen IX, X, XI, XII, XIII, XV und XVI können folgende Sätze abgeleitet werden:

XLV. Eine Kurve vom Maximalindex, die in  $k$  irreduzible Kurven zerfällt, kann höchstens  $k$  Ovale haben. Eine Kurve vom Maximalindex mit  $k$  Ovalen zerfällt in wenigstens  $k$  irreduzible Kurven.

XLVI. Eine Kurve  $2k$ - oder  $2k + 1$ -ter Ordnung vom Maximalindex kann höchstens  $k$  paare Züge haben. Erreicht die Anzahl der paaren Züge dieses Maximum, so sind sie alle Ovale, zu denen im Falle unpaarer Ordnung ein Zug dritter Ordnung ohne Spitze und Doppelpunkt hintritt. Die Anzahl der Doppelpunkte einer Kurve  $2k$ - bzw.  $2k + 1$ -ter Ordnung vom Maximalindex mit  $k$  Ovalen ist  $2k(k - 1)$  bzw.  $2(k^2 - 1)$ .

<sup>14a)</sup> Dieser Satz wurde auch von Herrn H. Mohrmann bewiesen (Math. Ann. 78, S. 173).

XLVII. Hat eine Kurve  $n$ -ter Ordnung vom Maximalindex  $p$  unpaare und  $q$  paare Züge, so erreicht die Anzahl  $p$  bzw.  $q$  bei gegebenen  $q$  bzw.  $p$  ihren größten Wert, wenn sie eine der Gleichung

$$p + 2q = n \quad \left(0 \leq p \leq n - 2, \quad 0 < q \leq \frac{n}{2}\right)$$

genügende positive ganze Zahl ist. Dann besteht die Kurve aus  $p$  Zügen dritter Ordnung und aus  $q$  Ovalen.

XLVIII. Eine Kurve  $3k - 1$ -ter,  $3k$ -ter oder  $3k + 1$ -ter Ordnung vom Maximalindex kann höchstens  $k$  im Endlichen liegende Ovale haben. Erreicht die Anzahl der im Endlichen liegenden Ovale der Kurve ihr Maximum, so liegt das erste der Ovale innerhalb des zweiten, das zweite innerhalb des dritten usw.

Es gibt für jede ganze Zahl  $k > 0$  eine Kurve  $3k - 1$ -ter,  $3k$ -ter oder  $3k + 1$ -ter Ordnung vom Maximalindex, die  $k$  im Endlichen liegende Ovale hat.

XLIX. Die maximale Anzahl der im Endlichen liegenden Ovale einer Kurve vom Maximalindex, die aus  $r$  Zügen besteht, ist  $\left[\frac{r+1}{2}\right]$ , wo das Klammerzeichen die größte Ganze aus der in ihm enthaltenen Zahl bedeutet.

Es gibt für jede ganze Zahl  $r$  Kurven vom Maximalindex, die aus  $r$  Zügen bestehen, von denen  $\left[\frac{r+1}{2}\right]$  im Endlichen liegende Ovale sind.

Liegen nämlich zwei Ovale einer Kurve  $\Gamma$  vom Maximalindex im Endlichen, so liegt der Punkt, der in der Polarfigur  $C$  von  $\Gamma$  der unendlich-fernen Gerade entspricht, innerhalb je eines der beiden entsprechenden Ovale der Kurve  $C$  vom Maximal-Klassenindex. Dies tritt nur ein, wenn das eine dieser Ovale innerhalb des anderen liegt<sup>15)</sup>.

<sup>15)</sup> H. Mohrmann spricht den Satz aus, daß eine Kurve vom Maximalindex höchstens ein Oval haben kann. Auf Grund der Sätze XLVI—XLIX ist es klar, daß der Satz von H. Mohrmann auch dann unrichtig ist, wenn das Oval einen im Endlichen liegenden Zug zweiter Ordnung bedeutet.



# Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme.

Teil II.

Sätze höheren Grades.

Von

Paul Hertz in Göttingen.

## Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung der unter demselben Titel in dieser Zeitschrift erschienenen Mitteilung; ihr Verständnis ist aber von der Lektüre jener Arbeit völlig unabhängig. Fortsetzung ist sie insofern, als in ihr höhere Gebilde auf dieselben Eigenschaften hin untersucht werden, auf die wir in der vorigen Mitteilung einfachere Gebilde untersuchten, wenn auch jetzt die Behandlung weniger weit reicht. Aber eben weil die Untersuchung jetzt nicht weiter geführt wird, ist das, was dem hier Bewiesenen in jener Arbeit entspricht, beinahe selbstverständlich, so daß es nicht als besondere Voraussetzung dieses Teiles in Betracht kommt.

Es wird nützlich sein, den Inhalt auch dieses Teiles in der Einleitung zusammenzufassen, weil in der ausführlichen Darstellung die dort erforderliche Allgemeinheit nicht den Grad von Anschaulichkeit aufkommen läßt, der bei Beschränkung auf die einfachsten Fälle erreicht werden kann.

Unsere Untersuchung bezieht sich wieder auf abgeschlossene Systeme von Sätzen, d. h. solche Systeme von Sätzen, die zugleich mit den Prämissen eines Schlusses auch seine Konklusion enthalten. Wieder fragen wir: Wann gibt es für ein abgeschlossenes Satzsystem mehrere Axiomensysteme? Diesmal haben wir es aber nicht mit Sätzen ersten Grades zu tun, durch die ein Element als Folge eines andern gesetzt wird und für die wir Formeln wie  $a \rightarrow b$  brauchen, sondern mit Sätzen höheren Grades — durch Formeln wie  $(a_1 \dots a_n) \rightarrow b$  bezeichnet —, durch die ein Element als abhängig von einem Komplex von Elementen gesetzt wird. Die Dinge liegen also nicht so einfach wie bei den Überlegungen des ersten





einer solchen Aussage, wenn unsern Definitionen keine Ergänzung hinzugefügt wird, nichts gewonnen wäre. Denn *alle* abgeschlossenen Satzsysteme enthalten Netze und Zyklen. Kommt in einem solchen Satzsystem nämlich der Satz  $a \rightarrow b$  vor, so enthält es gewiß auch den Zyklus  $(ab) \rightarrow a$ ,  $a \rightarrow b$ , und das Netz, das aus den Komplexen  $(ab)$ ,  $a$  besteht. Gibt es ferner zwei Sätze mit der gleichen linken Seite,  $a \rightarrow b$ ,  $a \rightarrow c$ , so läßt sich auch ein Zyklus bilden  $(ca) \rightarrow b$ ,  $(ba) \rightarrow c$ . Wir haben also Veranlassung, unsere Definitionen so zu ergänzen, daß Satzgebilde, wie die eben hingeschriebenen, nicht mehr Zyklen genannt werden können, und darum werden wir von den Sätzen eines Zyklus fordern, daß sie weder *trivial*, noch *abundant* sind. Dabei bezeichnen wir als trivial einen Satz, dessen Richtigkeit wir schon aus seiner Form einsehen können, wie das für den Satz  $ab \rightarrow a$  möglich ist. Dagegen ist der Satz  $(ca) \rightarrow b$  nicht trivial. Er hat dafür die Besonderheit, daß er ein Element, nämlich  $b$ , an mehr Bedingungen knüpft als nötig wäre; denn nach Voraussetzung zieht schon  $a$  allein  $b$  nach sich. Solche Sätze nennen wir *abundant*.

Es ist aber klar, daß wir in unserer formalen Betrachtung den Begriff Abundanz nur im relativen Sinne verwenden können. Nicht darauf kommt es an, daß aus dem betreffenden Satz einige Elemente des Vordersatzes weggelassen werden können, ohne daß der Satz aufhörte richtig zu bleiben, sondern daß der so entstehende Satz zu dem vorgelegten Satzsystem gehört, mit dem wir es gerade zu tun haben.

Bei der Gelegenheit mag nun eine prinzipielle Bemerkung am Platze sein, mit der wir noch einmal auf das Motiv zur Ausbildung unseres Formalismus zurückkehren. Selbstverständlich ist ursprünglich unser Interesse nur den richtigen Sätzen zugewandt. Daß nun überhaupt aus richtigen Sätzen andere erschlossen werden, beruht auf der Gültigkeit des Axioms, daß sich aus richtigen Prämissen richtige Konklusionen ergeben. Dieser Umstand gibt uns aber Veranlassung zur Betrachtung abgeschlossener Systeme, die mit jedem Inbegriff von Prämissen auch die zugehörige Konklusion enthalten. Natürlich haben wir es in den Anwendungen wieder mit abgeschlossenen Systemen von *richtigen* Sätzen zu tun. Aber es ist einleuchtend, daß alle unsere Überlegungen sich in gleicher Weise auf abgeschlossene Systeme beliebiger Sätze beziehen, unter denen auch nicht richtige vorkommen können. Das Axiom von der Richtigkeit der aus richtigen Prämissen gezogenen Konklusionen war ferner das Motiv zur Bildung des Begriffes Kettenschluß; einmal im Besitze dieses Begriffes haben wir an jenem Axiom kein Interesse mehr. Denn wir stellen hier Untersuchungen an nicht über die Richtigkeit sondern über die Beweisbarkeit von Sätzen. Von diesem Standpunkt aus nennen wir nun auch einen Satz in bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem *abundant*, wenn

es in demselben Satzsystem einen andern Satz gibt, durch den ein Element als Folge nur eines Teiles von den Elementen gesetzt wird, die in jenem ersten Satz zusammen als seine Voraussetzung erscheinen. Man erkennt, daß wir durch Einführung dieses Begriffes von der Abundanz Sätze größerer Allgemeinheit erhalten müssen, als wenn wir uns bei der Definition des Begriffes Abundanz auf den Begriff des richtigen Satzes bezogen hätten.

Wollen wir nun logische Gebilde definieren, deren Vorkommen als Bedingung für die Mehrdeutigkeit in der Wahl von Axiomensystemen in Betracht kommen könnte, so wird man die oben gegebenen vorläufigen Definitionen des Zyklus und des Netzes ergänzen. Von einem Zyklus wird man verlangen, daß er keine abundanten Sätze enthält und auch keine Sätze von der Form  $a \rightarrow a$ , und in ähnlicher Weise auch die Definition des Netzes modifizieren. Im Gegensatz zu den Betrachtungen des vorigen Teiles ist dann Netz kein absoluter Begriff mehr, sondern auch nur in bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem definiert. Es läßt sich jetzt zeigen, daß jedes Netz zum Bestehen eines Zyklus Anlaß gibt; endlich, daß das Fehlen von Zyklen hinreichende Bedingung für die eindeutige Bestimmtheit von Systemen inabundanter Axiome ist.

Um aber diesen Satz beweisen zu können, müssen wir noch einige Betrachtungen über das Vorkommen abundanter Sätze anstellen. Wie sie als Aussagen an sich entbehrlich sind, wird man auch ihre Entbehrlichkeit im Beweise vermuten; aber so selbstverständlich auch dieser Sachverhalt erscheint, zu seinem Beweise bedarf es noch einiger Vorbereitungen. Der Beweis wird am einfachsten geführt, indem man zunächst zeigt, daß sich jeder Beweis auf eine besonders einfache Form bringen läßt. Ein *Normalbeweis* liegt vor, so wollen wir sagen, wenn alle Obersätze, soweit sie nicht *tautologisch*, d. h. von der Form  $a = a$  sind, zu den Axiomen gehören. Nun findet man aber durch eine genauere Überlegung, daß jeder Beweis in einen Normalbeweis umgeformt werden kann. Es wird nützlich sein, das an einem einfachen Fall klarzumachen, da die allgemeine Behandlung weniger übersichtlich ist.

Sei der Beweis gegeben,

$$\begin{array}{l}
 (a_1 a_2) \rightarrow b_1 \\
 (a_3 a_4) \rightarrow b_2 \\
 (a_5 a_6) \rightarrow b_3 \\
 \hline
 \left( \begin{array}{l} a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \\ a_5 a_6 \end{array} \right) \rightarrow c
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (b_1 q_1) \rightarrow u_1 \quad (u_1 u_2 b_3 q_2) \rightarrow c \\
 (b_2 q_2) \rightarrow u_2 \\
 \hline
 (b_1 b_3 b_2 q_1 q_2 q_3) \rightarrow c
 \end{array}$$

Offenbar ist er kein Normalbeweis, weil hier ein Obersatz erst durch einen Syllogismus bewiesen ist. Es läßt sich aber aus ihm sofort durch eine Umformung der folgende Normalbeweis herstellen:

$$\begin{array}{c} (a_1 a_2) \rightarrow b_1 (b_1 q_1) \rightarrow u_1 \quad (a_3 a_4) \rightarrow b_3 (b_3 q_3) \rightarrow u_2 \\ (a_1 a_2 q_1) \rightarrow u_1 \quad (a_3 a_4 q_3) \rightarrow u_3 \quad (a_5 a_6) \rightarrow b_5 (u_1 u_2 b_3 q_3) \rightarrow c \\ \left( \begin{array}{c} a_1 a_2 \\ a_3 a_4 \quad q_1 q_2 q_3 \\ a_5 a_6 \end{array} \right) \rightarrow c. \end{array}$$

Die Zurückführbarkeit auf einen Normalbeweis aber erleichtert uns unsere Aufgabe wesentlich, die Entbehrlichkeit der abundanten Sätze bei Beweisen nachzuweisen. Von hier aus gelangt man dann weiter leicht zur Aufstellung einer hinreichenden Bedingung für die eindeutige Bestimmtheit unabhängiger Systeme inabundanter Axiome, die das Fehlen von Zyklen fordert.

Endlich sei noch ein Punkt erwähnt, in bezug auf den verschiedene Darstellungsarten möglich sind. In einem Syllogismus von der Form

$$\begin{array}{c} a \rightarrow b \\ (b \alpha) \rightarrow c \\ \hline (a \quad \alpha) \rightarrow c \end{array}$$

nennen wir  $\alpha$  ein *akzessorisches* Element. Man kann nun akzessorische Elemente ganz vermeiden, wenn man in den Syllogismen tautologische Sätze zuläßt. Beispielsweise würde in dieser Form der eben hingeschriebene Syllogismus lauten:

$$\begin{array}{c} a \rightarrow b \\ \alpha \rightarrow \alpha \\ (b \alpha) \rightarrow c \\ \hline (a \alpha) \rightarrow c. \end{array}$$

Umgekehrt kann man wieder tautologische Sätze vermeiden, wenn man akzessorische Elemente in den Kauf nimmt. Es schien mir am geeignetsten zu sein, hier keine Entscheidung zu treffen und beide Behandlungsarten nebeneinander gehen zu lassen, um so die logischen Wahrheiten von verschiedenen Seiten beleuchten zu können. Der Beweis für die Entbehrlichkeit abundanten Sätze läßt sich aber durch Zulassung tautologischer Sätze wesentlich abkürzen. Ebenso konnte der Beweis für die Transformierbarkeit von Beweisen in Normalbeweise in dieser Darstellungsform mit einfacherer Symbolik durchgeführt werden, obwohl er sachlich dadurch nicht einfacher wird. Der Ergänzung halber haben wir eben in dem obigen Beispiel akzessorische Elemente verwandt.

Über die Darstellung habe ich mehrfach Gelegenheit gehabt, mit Herrn P. Bernays zu sprechen und habe ihm für seinen Rat und seine Kritik sehr zu danken.

## § 1.

## Über den Begriff des unabhängigen Axiomensystems.

1. (Definition.) Wir betrachten einen Bereich endlich vieler Elemente, die wir mit  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, a_1^1, a_1^2, \dots$  usw. bezeichnen. Unter einem *Komplex* verstehen wir einen Inbegriff verschiedener Elemente des Bereiches. Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  Zeichen für verschiedene Elemente, so bezeichnen wir mit  $(a_1 \dots a_n)$  den aus ihnen bestehenden Komplex. Wir bezeichnen einen Komplex unter Umständen auch durch *einen* Buchstaben.

2. (Definition.) Mit einer in eine Klammer eingeschlossenen endlichen Menge von Zeichen, der das Zeichen '||' vorgesetzt ist, soll, auch wenn darin mehrere Zeichen für dasselbe Element vorkommen, der Komplex aller derjenigen Elemente gemeint sein, für die in der Zeichenmenge mindestens *ein* sie bezeichnendes Zeichen enthalten ist. Wenn also auch unter den Zeichen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  einige dasselbe Element bezeichnen, so ist der durch '||( $a_1 \dots a_n$ )' bezeichnete Komplex doch ein Inbegriff verschiedener Elemente.

3. (Definition.) Von einem Komplex  $A$  sagen wir, er sei in einem Komplex  $B$  *enthalten* oder *Teilkomplex* von  $B$ , wenn alle Elemente von  $A$  Elemente von  $B$  sind.

4. (Definition.) Von einem Komplex  $A$  sagen wir, er sei *eigentlich enthalten* in  $B$ , wenn  $A$  in  $B$  enthalten ist, aber  $B$  nicht in  $A$ .

5. (Definition.) Wir betrachten endlich viele Elemente. Unter Satz verstehen wir einen Inbegriff eines Komplexes, der auch nur aus einem einzigen Element bestehen kann und *antecedens* heißt, und eines Elementes, das *succedens* heißt. Die Bezeichnung für einen Satz ist  $(a_1 \dots a_n) \rightarrow b$ .

Anmerkung 1. Die Festsetzung, daß ein Komplex und daher das antecedens eines Satzes nur verschiedene Elemente enthalten soll, wäre nicht unbedingt notwendig gewesen. Durch ihre Einführung ersparen wir die Betrachtung einer logischen Operation. In anderer Hinsicht hätte es vielleicht auch Vorteil bringen können, antecedentia mit gleichen Elementen zu betrachten.

6. (Definition.) Ein Satz *ersten Grades* heißt ein Satz, dessen antecedens nur *ein* Element besitzt; ein Satz, dessen antecedens mehrere Elemente besitzt, heißt Satz höheren Grades.

7. (Definition.) Unter einem tautologischen Satz verstehen wir einen Satz ersten Grades, dessen antecedens und succedens identisch sind.

8. (Definition.) Unter einem *trivialen* Satz verstehen wir einen Satz, dessen succedens als Element im antecedens enthalten ist; also z. B. einen Satz  $(a_1, a_2) \rightarrow a_1$  oder  $a \rightarrow a$ .

Anmerkung 1. Besondere Axiome: „triviale Sätze sind immer richtig, tautologische Sätze sind immer richtig“, brauchen wir nicht, da wir nach (24) die abgeschlossenen Systeme so definieren, daß sie alle zu dem Elementenbereich gehörigen trivialen Sätze enthalten.

9. (Definition.) Ein Satz  $b$  heißt in einem Satz  $a$  *enthalten*, wenn das antecedens von  $a$  in dem antecedens von  $b$  enthalten ist, und beide dasselbe succedens haben.

10. (Lehrsatz.) Tautologische Sätze sind trivial.

11. (Lehrsatz.) In trivialen Sätzen enthaltene Sätze sind trivial.

12. (Lehrsatz.) Ist der Satz  $a$  in  $b$  enthalten, und  $b$  in  $c$ , so ist  $a$  in  $c$  enthalten.

13. (Definition.) Ein Satz  $a$  heißt in einem Satz  $b$  *eigentlich* enthalten, wenn  $a$  in  $b$ , aber  $b$  nicht in  $a$  enthalten ist.

14. (Definition.) Unter einem *unmittelbaren Schluß* verstehen wir den Inbegriff eines Satzes und eines in ihm enthaltenen; jener heißt Prämisse, dieser Konklusion.

15. (Definition.) Unter *Syllogismus* verstehen wir ein System von Sätzen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \left\{ \begin{array}{l} (a_1^1 a_2^1 \dots) \rightarrow b_1, \\ (a_1^2 a_2^2 \dots) \rightarrow b_2, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \\ \text{II.} & \parallel (b_1 b_2 \dots a_1 a_2 \dots) \rightarrow c, \\ \text{III.} & \parallel \left( \begin{array}{ll} a_1^1 a_2^1 \dots & \\ a_1^2 a_2^2 \dots & a_1 a_2 \dots \end{array} \right) \rightarrow c. \end{array}$$

Es soll also das antecedens von III. enthalten:

1. alle diejenigen Elemente, die in dem antecedens von I. vorkommen;
2. diejenigen des antecedens von II., die nicht succedentia von I. sind, und zwar jedes unter 1. und 2. genannten Elemente nur einmal und keine andern.

Hierbei heißen I. und II. die Prämissen, III. die Konklusion, I. das *Untersatzsystem*, II. der *Obersatz*, jeder Satz des Untersatzsystems ein *Untersatz*. Besteht das Untersatzsystem nur aus einem Satz, so heißt dieser ein *unverbundener*, im andern Falle ein *verbundener* Untersatz. Endlich heißen die Elemente  $b_1 b_2 \dots$  *Hauptelemente* des Obersatzes, und

die davon verschiedenen Elemente  $a_1, a_2, \dots$  *akzessorische* Elemente des Obersatzes.

16. (Definition.) Unter einem *reinen Syllogismus* verstehen wir einen Syllogismus ohne akzessorische Elemente; einen nicht reinen Syllogismus nennen wir unrein.

17. (Lehrsatz.) Jeder Syllogismus läßt sich durch Hinzufügen tautologischer Untersätze zu einem reinen Syllogismus machen.

18. (Lehrsatz.) Läßt man aus den Prämissen eines Syllogismus  $\Sigma$ , dessen Konklusion  $a$  ist, einen tautologischen verbundenen Untersatz fort, so erhält man die Prämissen zu einem Syllogismus  $\Sigma'$ , in dessen Konklusion  $a'$  der Satz  $a$  enthalten ist.

Beweis. Nach (15) gehört zu dem nach Streichung des tautologischen Untersatzes entstandenen System von Sätzen als Prämissen eine Konklusion  $a'$ . Sei  $x$  ein in dem antecedens von  $a'$  enthaltenes Element. Würde  $x$  nicht im antecedens von  $a$  vorkommen, so könnte es nicht in einem antecedens eines Untersatzes von  $\Sigma$  vorkommen, also auch nicht im antecedens eines Untersatzes von  $\Sigma'$ , müßte also im antecedens des Obersatzes von  $\Sigma'$  und daher von  $\Sigma$  vorkommen.  $x$  müßte somit, da es im antecedens von  $a$  nicht vorkommen soll, succedens eines Untersatzes von  $\Sigma$  sein, aber nicht des fortgelassenen, weil es nicht im antecedens eines Untersatzes von  $\Sigma$  vorkommt. Daher wäre  $x$  succedens eines Untersatzes auch von  $\Sigma'$ , und da es nicht im antecedens eines Untersatzes von  $\Sigma'$  vorkommt, wäre es gegen die Voraussetzung nicht im antecedens von  $a'$  enthalten.

19. (Definition.) Unter einem *Schluß* verstehen wir ein System von Sätzen, das entweder unmittelbarer Schluß oder Syllogismus ist.

20. (Definition.) Unter einem *reinen Schluß* verstehen wir ein System von Sätzen, das entweder unmittelbarer Schluß oder reiner Syllogismus ist.

21. (Lehrsatz.) Konklusionen aus trivialen Prämissen sind trivial.

Beweis. Für einen unmittelbaren Schluß folgt der Satz aus 11 und 14. In einem Syllogismus mit trivialen Prämissen ist das succedens der Konklusion zugleich succedens des Obersatzes, also im antecedens des Obersatzes enthalten, daher entweder akzessorisches Element und dann im antecedens der Konklusion enthalten oder auch succedens eines Untersatzes, und dann im antecedens dieses Untersatzes enthalten und somit auch im antecedens der Konklusion.

22. (Lehrsatz.) Geht in einer einfach geordneten Reihe von endlich viel Schlüssen jeder nicht tautologischen Prämisse eine gleichlautende Konklusion voraus, so besteht sie aus trivialen Sätzen.



**Beweis.** Der erste Schluß kann nur tautologische Prämissen besitzen, also nach 10 und 21 nur eine triviale Konklusion. Daher besitzt auch der zweite Schluß nur triviale Prämissen und daher nach 21 eine triviale Konklusion usw.

23. (Definition.) Unter einem zu einem Satzsystem  $\mathcal{T}$  gehörigen *Kettenschluß* verstehen wir eine einfach geordnete Reihe von endlich vielen Schlüssen, von der Eigenschaft, daß jede nicht zu  $\mathcal{T}$  gehörige nicht tautologische Prämisse mit einer früheren Konklusion übereinstimmt.

Anmerkung 1. Der Begriff des Kettenschlusses hat nur Bedeutung in bezug auf ein bestimmtes Satzsystem.

Anmerkung 2. Wir bemerken noch, daß wir von unseren Sätzen  $\mathcal{T}$  nicht verlangen, daß sie alle im Kettenschluß vorkommen.

Anmerkung 3. Ist ein Gebilde Kettenschluß in bezug auf ein Satzsystem  $\mathcal{T}$ , so ist es auch Kettenschluß in bezug auf jedes  $\mathcal{T}$  enthaltende Satzsystem. Schlußreihen, in denen *jeder* nicht-tautologischen Prämisse eine gleichlautende Konklusion vorausgeht, gehören zu jedem Satzsystem als Kettenschluß. Man könnte aber andererseits auch sagen, sie seien an sich Kettenschluß ohne Beziehung auf ein Satzsystem, da man ihnen kein Satzsystem zuzuordnen braucht. Da sie indes nach 22. nur zum Beweis (siehe 26) trivialer Sätze führen, deren Vorkommen im abgeschlossenen Satzsystem ohnehin aus 25. bekannt ist, ist ihre Betrachtung entbehrlich, und es genügt, wenn wir den Begriff Kettenschluß nur unter Bezugnahme auf ein vorgelegtes Satzsystem definieren.

24. (Definition.) In bezug auf einen gegebenen endlichen Bereich von Elementen nennen wir *abgeschlossenes Satzsystem* ein System von nicht nur trivialen Sätzen, das alle aus diesen Elementen zu bildenden tautologischen Sätze enthält und zu jedem Inbegriff von Sätzen, die Prämissen eines Schlusses sind, auch seine Konklusion.

25. (Lehrsatz.) Ein abgeschlossenes Satzsystem enthält alle zu dem vorgelegten Elementenbereich gehörigen trivialen Sätze.

**Beweis** aus 24. und 8.

26. (Definition.) Ein gegebener nicht trivialer Satz heißt aus einem gegebenen System  $\mathcal{T}$  von Sätzen, in dem er nicht vorkommt, eigentlich beweisbar, wenn er Konklusion eines Schlusses in einem zu  $\mathcal{T}$  gehörigen Kettenschluß ist. Dieser heißt Beweis des Satzes. Ein nicht trivialer Satz heißt aus einem Satzsystem  $\mathcal{T}$  beweisbar, wenn er zu  $\mathcal{T}$  gehört oder eigentlich beweisbar aus  $\mathcal{T}$  ist.

27. (Lehrsatz.) Gibt es für einen Satz  $\alpha$  aus einem Satzsystem  $\mathcal{T}$  einen Beweis, so gibt es auch für  $\alpha$  aus  $\mathcal{T}$  einen Beweis ohne unreine Schlüsse.



Beweis aus 17.

28. (Lehrsatz.) Ist  $\mathcal{I}$  ein System von Sätzen, die zu den Sätzen eines abgeschlossenen Satzsystems  $\mathcal{S}$  gehören, und ist ein Satz  $\alpha$  aus  $\mathcal{I}$  beweisbar, so gehört er auch zu  $\mathcal{S}$ .

29. (Definition.) In bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathcal{S}$  heißt Axiomensystem ein System  $\mathcal{A}$  nicht tautologischer Sätze, wenn jeder nicht triviale Satz von  $\mathcal{S}$  aus  $\mathcal{A}$  beweisbar ist.

30. (Lehrsatz.) Zu jedem abgeschlossenen Satzsystem  $\mathcal{S}$  gibt es mindestens ein Axiomensystem ohne triviale Sätze.

Beweis. Nämlich das System der nicht trivialen zu  $\mathcal{S}$  gehörigen Sätze.

31. (Lehrsatz.) Ist jeder Satz eines Satzsystems  $\mathcal{U}$  aus den Sätzen des Systems  $\mathcal{I}$  beweisbar, und ist der Satz  $\alpha$  aus  $\mathcal{U}$  beweisbar, so ist  $\alpha$  auch aus den Sätzen von  $\mathcal{I}$  beweisbar.

32. (Definition.) Unter einem *unabhängigen Axiomensystem*  $\mathcal{A}$  verstehen wir ein System von Axiomen, von denen keines trivial und keines aus anderen beweisbar ist.

33. (Lehrsatz.) Zu jedem abgeschlossenen Satzsystem gibt es mindestens ein unabhängiges Axiomensystem.

Beweis. Nach 30. gibt es ein Axiomensystem ohne triviale Sätze. Aus diesem lasse man der Reihe nach diejenigen Axiome fort, die aus den jeweils noch vorhandenen beweisbar sind. Das Verfahren muß abbrechen; das übrig bleibende System ist nach 31. Axiomensystem und unabhängig.

## § 2.

### Das Schlußsystem.

34. (Vorbemerkung und Definition.) Wir werden im folgenden Inbegriffe von Sätzen und Schlüssen betrachten. Hierbei kann es vorkommen, daß einige Sätze übereinstimmendes antecedens und succedens haben. Wir werden sie trotzdem nicht als miteinander identisch ansehen, da sie in der Menge, in der sie vorkommen, einen andern Platz einnehmen, werden sie aber als *gleichlautend* bezeichnen. Ebenso können Schlüsse unterschieden werden, auch wenn ihre Untersätze, Obersätze und Konklusionen gleichlautend sind. Die Schlüsse heißen in solchem Falle gleichlautend.

35. (Definition.) Wir nennen *Schlußaggregat* ein System  $\mathcal{U}$  von endlich vielen Schlüssen, entweder an sich oder in bezug auf eine Zuordnung  $Z$  zwischen seinen Prämissen und Konklusionen, durch die eine Konklusion höchstens *einer* (34) Prämisse und zwar einer gleichlautenden

eines andern Schlusses zugeordnet wird. Diejenigen Prämissen, denen keine Konklusionen durch  $Z$  zugeordnet sind, bzw. alle, wenn keine Zuordnung  $Z$  gegeben ist, heißen oberste Sätze des Schlußsystems.

Anmerkung 1. Eine Prämisse kann durch  $Z$  mehreren Konklusionen zugeordnet sein.

Anmerkung 2. Die oberste Sätze des Schlußaggregates spielen nicht ganz dieselbe Rolle wie die Sätze  $\mathfrak{I}$  für den Kettenschluß (s. 23. Anm. 2).

36. (Definition.) In einem Schlußaggregat nennen wir Glied den Inbegriff einer Prämisse und einer ihr durch  $Z$  zugeordneten Konklusion.

37. (Definition.) In bezug auf ein Schlußaggregat nennen wir *Teilkette* eine einfach geordnete Reihe von Sätzen und Gliedern des Schlußaggregats, die mit einem Einzelsatz oder einem Glied beginnt und aufhört, sonst aber nur Glieder besitzt, derart, daß die Konklusion jedes Gliedes und die Prämisse des folgenden Gliedes Konklusion und Prämisse in einem Schluß des Schlußaggregates sind. Enthält die Reihe an erster Stelle einen Einzelsatz, so soll das nur eine Konklusion sein, die als unterstes Glied der Teilkette gelten soll, und folgt darauf noch ein Glied, so soll der betreffende Einzelsatz bzw. die Prämisse des Gliedes Prämisse in dem Schluß sein, in dem der erstgenannte Einzelsatz Konklusion ist. Enthält die Reihe an letzter Stelle einen Einzelsatz, so soll es eine Prämisse sein, die dann als oberstes Glied der Teilkette gelten soll, und geht in der Reihe ein Glied voraus, so soll der betreffende Einzelsatz, bzw. die Konklusion des Gliedes, Konklusion in dem Schluß sein, in dem der erstgenannte Einzelsatz Prämisse ist. Das erste Glied der so geordneten Reihe heißt das unterste, das letzte das oberste. Zwei Teilketten gelten als verschieden, wenn ihre Glieder nicht der Reihe nach in bezug auf ihre Stelle innerhalb des Schlußaggregates übereinstimmen.

38. (Definition.) Schlußsystem nennen wir ein Schlußaggregat, für das es eine Zahl  $N$  gibt, so daß keine Teilkette mehr als  $N$  Glieder enthält. Die obersten Sätze des Schlußaggregates sind auch die obersten Sätze des Schlußsystemes.

39. (Lehrsatz.) Sind  $A'$ ,  $A''$  zwei Schlüsse eines Schlußsystems,  $a'$  und  $b'$  eine Prämisse und die Konklusion von  $A'$ , ferner  $a''$  und  $b''$  eine Prämisse und Konklusion von  $A''$ , so kann durch die zum Schlußsystem zugehörige Zuordnung  $Z$  nicht gleichzeitig der Satz  $a'$  dem Satz  $b''$  und der Satz  $a''$  dem Satz  $b'$  zugeordnet sein.

Beweis. Sonst gäbe es keine obere Grenze für die Gliedzahl der in dem Schlußsystem enthaltenen Teilketten.

40. (Lehrsatz.) Gibt es einen Beweis aus einem Satzsystem  $\mathfrak{I}$  für einen nicht trivialen Satz, der nicht zu  $\mathfrak{I}$  gehört, so kann man aus den

erforderlichenfalls mehrfach zu verwendenden Schlüssen dieses Beweises durch eine Zuordnung ein Schlußsystem machen, dessen oberste Sätze tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{T}$  gehören.

**Beweis.** Man ordne durch eine Zuordnung  $Z$  jeder nicht-tautologischen nicht zu  $\mathfrak{T}$  gehörigen Prämisse eine vorhergehende gleichlautende Konklusion zu.

41. (Lehrsatz.) Zu jeder Konklusion in einem Schlußsystem gibt es mindestens eine Teilkette, deren unterstes Glied sie ist.

42. (Definition.) In einem Schlußsystem nennen wir *Ordnungszahl* einer Konklusion das um 1 verminderte Maximum von den Gliedzahlen aller derjenigen Teilketten, deren unterstes Glied die betreffende Konklusion ist, Ordnungszahl eines Schlusses die Ordnungszahl seiner Konklusion und Ordnungszahl einer Prämisse die um 1 verminderte Ordnungszahl des Schlusses, in dem sie vorkommt.

43. (Lehrsatz.) Ist  $e$  eine Konklusion in einem Schlusse eines Schlußsystems, so gibt es für  $e$  einen aus Schlüssen des Schlußsystems bestehenden Beweis aus den obersten Sätzen des Schlußsystems.

**Beweis.** Man bilde aus den Schlüssen des Schlußsystems, deren Ordnungszahl größer als die von  $e$  ist, eine Reihe, indem man sie nach der Ordnungszahl ordnet, wobei die Reihenfolge für Schlüsse derselben Ordnungszahl gleichgültig ist, und füge den  $e$  als Konklusion enthaltenden Schluß als letzten dazu. Dadurch erhält man einen Beweis für  $e$  aus den obersten Sätzen des Schlußsystemes.

44. (Lehrsatz.) Gehören die obersten Sätze eines Schlußsystems zu einem abgeschlossenen Satzsystem  $\mathfrak{S}$ , so gehören alle seine Konklusionen zu  $\mathfrak{S}$ .

**Beweis** aus 43. und 28.

45. (Definition.) In einem Schlußsystem nennen wir eine *unterste Konklusion* eine solche, der keine andere Prämisse zugeordnet ist, und einen *untersten Schluß* einen Schluß, dessen Konklusion eine unterste Konklusion ist.

46. (Definition.) Ein Schlußsystem mit nur *einem* untersten Schluß nennen wir ein *primitives Schlußsystem*.

47. (Lehrsatz.) Ist  $e$  der unterste Satz eines primitiven Schlußsystems, und ist  $b$  ein beliebiger von  $e$  verschiedener Satz, so gibt es immer eine Teilkette, deren oberstes Glied  $b$  und deren unterstes Glied  $e$  ist.

48. (Lehrsatz und Definition.) Sind  $a$  und  $b$  zwei Sätze eines Schlußsystems und gibt es eine Teilkette, für die  $b$  oberstes und  $a$  unterstes

Glied ist, so gibt es keine Teilkette, für die  $a$  oberstes und  $b$  unterstes Glied ist. In diesem Falle heißen  $a$  und  $b$  *verwandt* und  $b$  der *höhere*,  $a$  der *niedrigere* Satz.

**Beweis.** Gäbe es eine Teilkette, für die  $a$  oberstes Glied und  $b$  unterstes, und eine Teilkette, für die  $b$  oberstes und  $a$  unterstes Glied wäre, so ließe sich keine Grenze für die Gliedzahl von Teilketten finden.

49. (Lehrsatz.) Ist  $e$  Konklusion eines Schlußsystems, so läßt sich durch Fortlassung von Schlüssen aus dem Schlußsystem ein primitives Schlußsystem mit  $e$  als unterstem Satz herstellen.

**Beweis.** Man lasse alle Schlüsse weg, bis auf den  $e$  als Konklusion enthaltenden und die, deren Sätze mit  $e$  verwandt und höher sind.

50. (Lehrsatz.) Aus den erforderlichenfalls mehrfach zu verwendenden Schlüssen eines Beweises aus einem *Satzsystem*  $\mathfrak{T}$  für einen nicht trivialen Satz  $e$ , der nicht zu  $\mathfrak{T}$  gehört, kann man durch eine Zuordnung ein primitives Schlußsystem machen, dessen oberste Sätze tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{T}$  gehören und dessen unterster Satz  $e$  ist.

**Beweis.** Aus 49. und 40.

### § 3.

#### Der Normalbeweis.

51. (Definition.) Unter einem *Normalbeweis* eines Satzes aus einem System von Sätzen  $\mathfrak{T}$  verstehen wir einen Beweis, in dem jeder nicht tautologische Obersatz zu  $\mathfrak{T}$  gehört.

52. (Definition.) Unter einem *Normalschlußsystem* verstehen wir ein Schlußsystem, in dem alle Obersätze oberste Sätze sind.

53. (Lehrsatz.) Ist  $e$  Konklusion in einem Schluß eines Normalschlußsystems, so gibt es für  $e$  einen aus Schlüssen des Schlußsystems bestehenden Normalbeweis aus den obersten Sätzen des Schlußsystems.

**Beweis.** Wie von 43.

54. (Lehrsatz.) Ist ein nicht trivialer Satz  $e$  aus einem Satzsystem  $\mathfrak{T}$  eigentlich beweisbar, so gibt es ein primitives Normalschlußsystem ohne unreine Schlüsse, dessen unterster Satz  $e$  ist, und dessen oberste Sätze tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{T}$  gehören.

**Beweis.** Nach 27. und 50. gibt es ein primitives Schlußsystem  $\Sigma$  ohne unreine Schlüsse, dessen oberste Sätze tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{T}$  gehören. Sei nun in  $\Sigma$  der Schluß I ein Syllogismus, dessen Obersatz  $\phi$  kein oberster Satz ist, so geht von  $\phi$  eine Teilkette aus und zwar wird  $\phi$  gleichlautend mit der zugeordneten Konklusion eines Schlusses II sein.

Wir betrachten

A. den Fall, daß II. ein Syllogismus ist. Es habe I. die Form:

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{l} (a_1^1 a_2^1 \dots) \rightarrow b^1 \\ (a_1^2 a_2^2 \dots) \rightarrow b^2 \\ \dots \dots \dots \\ (b^1 b^2 \dots) \rightarrow c \\ \hline \left( \begin{array}{l} a_1^1 a_2^1 \dots \\ a_1^2 a_2^2 \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right) \rightarrow c \end{array} \right.$$

und der Schluß II.:

$$\text{II.} \left\{ \begin{array}{l} (b_1^{1'} b_2^{1'} \dots) \rightarrow u^1 \\ (b_1^{2'} b_2^{2'} \dots) \rightarrow u^2 \\ \dots \dots \dots \\ (u^1 u^2 \dots) \rightarrow c \\ \hline \left( \begin{array}{l} b_1^{1'} b_2^{1'} \dots \\ b_1^{2'} b_2^{2'} \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right) \rightarrow c \end{array} \right.$$

wobei wir bemerken:

1\*. Die Menge der  $b'$  ist identisch mit der Menge der  $b$ . Nun betrachten wir das System von Schlüssen:

$$\text{III.}^1 \left\{ \begin{array}{l} (a_{11}^{11} a_{12}^{11} \dots) \rightarrow b_1^{1'} \\ (a_{11}^{12} a_{12}^{12} \dots) \rightarrow b_1^{1'} \\ \dots \dots \dots \\ (a_{21}^{11} a_{22}^{11} \dots) \rightarrow b_2^{1'} \\ (a_{21}^{12} a_{22}^{12} \dots) \rightarrow b_2^{1'} \\ \dots \dots \dots \\ (b_1^{1'} b_2^{1'} \dots) \rightarrow u^1 \\ \hline \left( \begin{array}{l} a_{11}^{11} a_{12}^{11} \dots \\ a_{11}^{12} a_{12}^{12} \dots \\ \dots \dots \dots \\ a_{21}^{11} a_{22}^{11} \dots \\ a_{21}^{12} a_{22}^{12} \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right) \rightarrow u^1 \end{array} \right.$$



Nach 3\* ist die Konklusion von IV. mit der von I. identisch. Wir ersetzen also I. und II. durch III. und IV. In der entstehenden Menge von Schlüssen können wir eine Zuordnung der neu hinzugekommenen Sätze zu andern so herstellen, daß wieder ein Schlußsystem entsteht.

a) Der Obersatz von IV. ist gleichlautend mit dem Obersatz von II.; ist dieser nicht oberster Satz von  $\Sigma$ , so ordnen wir den Obersatz von IV. denjenigen Konklusionen zu, denen in  $\Sigma$  der Obersatz von II. zugeordnet war. Diese müssen nach (39) Konklusionen anderer Schlüsse als I. und II. sein.

b) Die Untersätze von IV. sind den Konklusionen von III. zuzuordnen.

c) Die Obersätze von III. sind gleichlautend mit den Untersätzen von II. und werden, falls die betreffenden gleichlautenden Untersätze nicht oberste Sätze sind, den Konklusionen zugeordnet, denen diese in  $\Sigma$  zugeordnet waren, nämlich nach (39) Konklusionen anderer Schlüsse als I. und II.

d) Die Untersätze von III. sind gleichlautend mit Untersätzen von I. und werden, falls die betreffenden gleichlautenden Untersätze nicht oberste Sätze von  $\Sigma$  sind, den Konklusionen zugeordnet, denen diese in  $\Sigma$  zugeordnet waren, nämlich Konklusionen anderer Schlüsse als I. und II. Denn im Schlußsystem kann nach (35) eine Konklusion nicht mehreren Prämissen zugeordnet sein (wohl aber könnte eine der Konklusionen, denen die Untersätze von I. in  $\Sigma$  zugeordnet waren, zu einem mit II. gleichlautenden Schluß gehören.)

Andererseits sind:

$\alpha$ ) die Konklusionen von III., wie schon unter b) bemerkt, den Untersätzen von IV. zuzuordnen;

$\beta$ ) ist die Konklusion von IV. der Prämisse zuzuordnen, der die Konklusion von I. in  $\Sigma$  zugeordnet war, falls diese nicht unterster Satz von  $\Sigma$  war.

Wir ersetzen also I. und II. durch III. und IV. Prämissen, die weder tautologisch noch anderen gleichlautenden Konklusionen zugeordnet sind, müssen zu  $\mathfrak{I}$  gehören. (Würde es keine solche geben, so könnte man nach dem in 43. benutzten Verfahren eine Reihe von Schlüssen finden, so daß jeder nicht-tautologischen Prämisse eine gleichlautende Konklusion vorausgeht, was nach 22. nicht sein kann.) Also erhält man durch die beschriebene Zuordnung ein primitives Schlußsystem  $\Sigma'$  ohne unreine Schlüsse, deren oberste Sätze tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{I}$  gehören.

Nun hat nach a) der Obersatz von IV. in  $\Sigma'$  dieselbe Ordnungszahl wie der Obersatz von II. in  $\Sigma$ . Ferner hat nach c) die Konklusion von II. in  $\Sigma$  eine um 1 größere Ordnungszahl als die größte Ordnungszahl von Obersätzen von III. in  $\Sigma'$ , also ist die größte Ordnungszahl von Obersätzen III.

in  $\Sigma'$  um 1 geringer als die Ordnungszahl des Obersatzes von I in  $\Sigma$ . Durch unsere Umformung wird also eine Ordnungszahl eines Obersatzes durch eine Menge niedrigerer Ordnungszahlen von Obersätzen ersetzt.

Betrachten wir ferner den Fall B:

Der Schluß II. ist unmittelbarer Schluß.

Dann hat I. wieder die Form:

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{l} (a_1^1 a_2^1 \dots) \rightarrow b^1 \\ (a_1^2 a_2^2 \dots) \rightarrow b^2 \\ \dots \dots \dots \\ \parallel (b^1 b^2 \dots) \rightarrow c \\ \hline \parallel \left( \begin{array}{l} (a_1^1 a_2^1 \dots) \\ (a_1^2 a_2^2 \dots) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right) \rightarrow c \end{array} \right.$$

und II. die Form:

$$\text{II.} \quad \frac{(b_1 b_2 \dots) \rightarrow c}{\parallel (b^1 b^2 \dots) \rightarrow c},$$

wo die  $b_i$  zu den  $b^i$  gehören.

Wir bilden den Schluß III.

$$\text{III.} \left\{ \begin{array}{l} (a_1^1 a_2^1 \dots) \rightarrow b_1 \\ (a_1^2 a_2^2 \dots) \rightarrow b_2 \\ \dots \dots \dots \\ \parallel (b_1 b_2 \dots) \rightarrow c \\ \hline \parallel \left( \begin{array}{l} (a_1^1 a_2^1 \dots) \\ (a_1^2 a_2^2 \dots) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right) \rightarrow c, \end{array} \right.$$

wo die  $a$  zu den  $a$  gehören, und den Schluß IV

$$\text{IV.} \left\{ \begin{array}{l} \parallel \left( \begin{array}{l} (a_1^1 a_2^1 \dots) \\ (a_1^2 a_2^2 \dots) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right) \rightarrow c \\ \hline \parallel \left( \begin{array}{l} (a_1^1 a_2^1 \dots) \\ (a_1^2 a_2^2 \dots) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right) \rightarrow c \end{array} \right.$$

Hier wird die Prämisse von IV. der Konklusion von III. zugeordnet, der Obersatz von III. den Konklusionen, denen in  $\Sigma$  die Prämisse von II. zugeordnet war und die Untersätze von III. den Konklusionen, denen in  $\Sigma$  die gleichlautenden Untersätze von I. zugeordnet waren. Wieder entsteht,



wenn I. und II. durch III. und IV. ersetzt werden, ein primitives Schlußsystem  $\Sigma'$ , das dieselben obersten Sätze und denselben untersten Satz besitzt wie  $\Sigma$ . Nun hat der Obersatz von I. in  $\Sigma'$  eine um 1 größere Ordnungszahl, als die Prämisse von II. und daher auch als der Obersatz von III. in  $\Sigma'$ . Also auch im Falle B wird die Ordnungszahl eines Obersatzes durch ein System niedrigerer Ordnungszahlen von Obersätzen, diesmal eine einzige, ersetzt. Ist nun  $N$  das Maximum für alle Ordnungszahlen von Obersätzen, so kann man durch eine endliche Anzahl von solchen Umformungen erreichen, daß kein Obersatz eine Ordnungszahl  $> N - 1$  besitzt; durch weitere Umformungen, daß kein Obersatz eine Ordnungszahl  $> N - 2$  besitzt usw. Endlich muß man zu einem Schlußsystem kommen, in dem alle Obersätze die Ordnungszahl 0 haben, d. h. zu einem Normalschlußsystem.

55. (Lehrsatz.) Ist ein nicht-trivialer Satz  $e$  aus einem Satzsystem  $\mathcal{T}$  eigentlich beweisbar, so gibt es auch einen Normalbeweis für  $e$  aus  $\mathcal{T}$ .

Beweis. Aus 54. und 53.

56. (Lehrsatz.) Ist  $e$  der unterste Satz in einem primitiven Normalschlußsystem, und  $e'$  ein Satz, der nicht oberster und nicht unterster Satz des Schlußsystems ist, so ist das antecedens von  $e'$  in dem antecedens von  $e$  enthalten.

Beweis. Sei  $e_1 = e, e_2, \dots, e_n = e'$  die Teilkette, die  $e$  als unterstes,  $e'$  als oberstes und mindestens zwei Glieder enthält. Dann muß der Satz  $e_{i+1}$  entweder Prämisse eines unmittelbaren Schlusses sein, in dem  $e_i$  Konklusion ist, oder Untersatz in einem Syllogismus, in dem  $e_i$  Konklusion ist. In beiden Fällen ist das antecedens von  $e_{i+1}$  in dem von  $e_i$  enthalten. Da das für je zwei aufeinander folgende Sätze der Teilkette gilt, so ist auch das antecedens von  $e'$  in dem von  $e$  enthalten.

#### § 4.

##### Abundanz.

57. (Definition.) In bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathcal{S}$  nennen wir *abundant* einen zu  $\mathcal{S}$  gehörigen Satz, der in einem zu  $\mathcal{S}$  gehörigen Satz eigentlich enthalten ist; einen nicht abundanten Satz nennen wir *inabundant*.

Anmerkung. Der Begriff der Abundanz bezieht sich also immer auf ein vorgelegtes Satzsystem (vgl. die Einleitung). Es ist aber nicht überall notwendig, das besonders zum Ausdruck zu bringen.

58. (Lehrsatz.) Ein Satz, der in einem in bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathcal{S}$  abundanten Satz enthalten ist, gehört zu  $\mathcal{S}$  und ist abundant.

59. (Lehrsatz.) Jeder in bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathfrak{S}$  abundante Satz ist in einem zu  $\mathfrak{S}$  gehörigen inabundanten Satz eigentlich enthalten.

60. (Lehrsatz.) Wenn  $\mathfrak{A}$  ein System inabundanter Axiome für ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathfrak{S}$ , und  $e$  ein nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehöriger nicht-trivialer Satz von  $\mathfrak{S}$  ist, so gibt es ein primitives Normalschlußsystem ohne unreine Schlüsse, dessen oberste Sätze tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{A}$  gehören, und dessen unterster Satz  $e$  ist, von folgender Eigenschaft: Ist  $\bar{r}$  ein abundanter Untersatz und  $\bar{r}$  ein  $\bar{r}$  enthaltender inabundanter Satz von  $\mathfrak{S}$ , so ist der Prämisse  $\bar{r}$  die Konklusion  $\bar{r}$  in einem unmittelbaren Schluß ( $\bar{r} \bar{r}$ ) zugeordnet.

Beweis. Nach der Definition 29 gibt es einen Beweis für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$  und daher nach 54. ein primitives Normalschlußsystem ohne unreine Schlüsse mit  $e$  als unterstem Satz und obersten Sätzen, die tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{A}$  gehören. Abundante Sätze können in ihm nicht Obersätze sein, da die Obersätze tautologisch oder Axiome sind. Sei nun  $e_1, e_2, \dots$  die Menge derjenigen abundanten Untersätze, die die Eigenschaft haben, daß die Teilkette  $e, e_i$  außer  $e$  und  $e_i$  keinen abundanten Satz enthält. Da die  $e_i$  wegen ihrer Abundanz keine obersten Sätze sind, so sind ihre antecedentia nach 56. in dem von  $e$  enthalten. Wir bezeichnen ferner mit  $e_i^1, e_i^2, e_i^3, \dots$  die sämtlichen  $e_i$  enthaltenden inabundanten Sätze von  $\mathfrak{S}$ , die zu  $\mathfrak{S}$  gehören. Ihre antecedentia sind in denen von  $e_i$  eigentlich enthalten, sie besitzen also mindestens ein Element weniger als das antecedens von  $e$ . Nun gibt es nach 54. zu jedem nicht-tautologischen, nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehörigen  $e_i^k$  ein primitives Normalschlußsystem ohne unreine Schlüsse  $\Sigma_i^k$ , in dem  $e_i^k$  unterster Satz ist, und dessen oberste Sätze tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{A}$  gehören. Man kann jetzt aus  $\Sigma$  und den  $\Sigma_i^k$  ein neues Schlußsystem auf folgende Weise bilden:

1. Man läßt aus  $\Sigma$  alle Schlüsse fort, die höhere verwandte Sätze von  $e_i$  enthalten.

2. Man fügt die unmittelbaren Schlüsse  $e_i^r, e_i$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) hinzu und ordnet die Prämisse  $e_i$  in  $\Sigma$  den Konklusionen  $e_i^r, e_i$  zu.

3. Man fügt die Schlußsysteme  $\Sigma_i^k$  hinzu und ordnet der Prämisse des Schlusses  $e_i^k, e_i$  die unterste Konklusion  $e_i^k$  des primitiven Schlußsystems  $\Sigma_i^k$  zu. Auf diese Weise erhält man ein neues Schlußsystem  $\Sigma'$ . Hat es noch nicht die geforderte Eigenschaft, so sind abundante Sätze vorhanden, die höhere Verwandte von  $e_i^r$  sind. Wir betrachten in diesem Falle wieder diejenigen abundanten Sätze  $e_{i1}^r$ , die die Eigenschaft haben, daß die Teilkette  $e_i^r, e_{i1}^r$  außer  $e_i^r$  keine anderen abundanten Sätze besitzt. Die  $e_{i1}^r$  enthaltenden inabundanten Sätze haben im antecedens mindestens

zwei Elemente weniger als  $e$ . Es werden nun die höheren verwandten Sätze von  $e_i$  fortgelassen und es wird ein neues Schlußsystem gebildet unter Hinzufügung unmittelbarer Schlüsse. Man sieht, daß dieses Verfahren abbrechen muß, und daß man schließlich zu einem Schlußsystem von der geforderten Eigenschaft gelangt.

61. (Lehrsatz.) Ist  $\mathfrak{A}$  ein System inabundanter Axiome für ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathfrak{S}$  und  $e$  ein nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehöriger nicht trivialer Satz von  $\mathfrak{S}$ , so gibt es einen Normalbeweis ohne unreine Schlüsse für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$  von der Art, daß jedem abundanten Untersatz  $\gamma$  sämtliche ihn enthaltenden inabundanten Sätze von  $\mathfrak{S}$  als Prämissen solcher unmittelbarer Schlüsse vorausgehen, die  $\gamma$  als Konklusion besitzen.

62. (Definition.) In bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathfrak{S}$  nennen wir in einem Syllogismus einen *Komplex eines Untersatzes entbehrlich*, wenn nach seiner Fortlassung ein Syllogismus übrig bleibt, dessen Sätze zu  $\mathfrak{S}$  gehören.

63. (Definition.) In einem Syllogismus heißt ein *Obersatz entbehrlich*, wenn die Konklusion des Syllogismus in einem seiner Untersätze enthalten ist.

64. (Lehrsatz.) Tautologische Obersätze sind entbehrlich.

65. (Definition.) In bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem und ein zugehöriges Axiomensystem  $\mathfrak{A}$  nennen wir in einem Beweis für einen nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehörigen nicht trivialen Satz  $e$  einen *Schluß entbehrlich*, wenn nach seiner Fortlassung ein Beweis für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$  übrig bleibt.

66. (Lehrsatz.) In einem Beweis ohne entbehrliche Schlüsse ist keine Konklusion gleichlautend mit einer Prämisse des Schlusses, zu dem sie gehört.

67. (Lehrsatz.) In einem Beweis ohne entbehrliche Schlüsse für einen nicht trivialen Satz  $e$ , ist  $e$  Konklusion des letzten Schlusses.

68. (Lehrsatz.) Ist  $\mathfrak{A}$  ein System inabundanter Axiome für ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathfrak{S}$  und  $e$  ein nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehöriger nicht-trivialer Satz von  $\mathfrak{S}$ , so gibt es einen Normalbeweis ohne unreine Schlüsse für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$ , der keine entbehrlichen Komplexe, Obersätze und Schlüsse besitzt.

Beweis. Nach 61. gibt es einen Normalbeweis  $\mathfrak{B}$  ohne unreine Schlüsse für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$  von der Art, daß jedem abundanten Untersatz  $\gamma$  jeder ihn enthaltende inabundante Satz von  $\mathfrak{S}$  als Prämisse eines unmittelbaren Schlusses mit  $\gamma$  als Konklusion vorausgeht. Sei nun in dem Syllogismus  $X$  von  $\mathfrak{B}$   $\eta$  ein Untersatz, in dem ein Komplex entbehrlich ist, und entstehe durch Fortlassung dieses Komplexes aus dem antecedens von  $\eta$  der zum Satzsystem  $\mathfrak{S}$  gehörige Satz  $\eta'$ . Ferner sei  $\eta'$  in

dem zu  $\mathfrak{S}$  gehörigen inabundanten Satz  $\eta''$  enthalten, wobei  $\eta'$  und  $\eta''$  auch gleichlautend sein können. Dann geht in  $\mathfrak{B}$  dem Syllogismus  $X$  der unmittelbare Schluß  $\eta'', \eta$  voraus. Wir setzen unmittelbar hinter ihn den Schluß  $\eta'', \eta'$  und ersetzen in  $X$  den Satz  $\eta$  durch  $\eta'$ . Entsprechend verfahren wir mit allen andern Untersätzen, die entbehrliche Komplexe enthalten. Durch diese Fortlassungen können keine unreinen Schlüsse entstehen. Schließlich verwandeln wir die entbehrliche Obersätze enthaltenden Syllogismen in unmittelbare Schlüsse, lassen einen etwa vorhandenen entbehrlichen Schluß fort, aus dem Rest wieder einen etwa vorhandenen entbehrlichen Schluß, usw.

69. (Lehrsatz.) In einem, einen Satz  $e$  beweisenden, aus reinen Schlüssen bestehenden Normalbeweis ohne entbehrliche Komplexe und entbehrliche Schlüsse, der zu einem System inabundanter Axiome für ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathfrak{S}$  gehört, gibt es zu jedem abundanten Satz  $\chi$ , der nicht der letzte ist, einen späteren abundanten Satz.

Beweis.

I.  $\chi$  ist Konklusion. Dann ist nach Voraussetzung und 67.  $\chi$  nicht  $e$ , und da  $\chi$  Konklusion eines nicht entbehrlichen Schlusses ist, muß ein gleichlautender Satz später vorkommen.

II.  $\chi$  ist Prämisse eines Schlusses  $X$ .

1.  $X$  ist unmittelbarer Schluß. Dann ist nach 66. die Konklusion von  $X$  in der Prämisse von  $\chi$  eigentlich enthalten, also abundant.

2.  $X$  ist Syllogismus. Dann kann  $\chi$  wegen seiner Abundanz weder tautologisch noch Axiom sein, muß also Untersatz sein.

a)  $\chi$  ist unverbundener Untersatz. Dann kann man aus dem antecedens von  $\chi$  einen Komplex  $C$  entfernen, so daß ein neuer zu  $\mathfrak{S}$  gehöriger Satz entsteht. Man erhält also auch durch Streichung des Komplexes  $C$  aus der Konklusion einen zu  $\mathfrak{S}$  gehörigen Satz; die Konklusion ist also abundant.

b)  $\chi$  ist verbundener Untersatz. Sei wieder  $C$  ein Komplex, der aus  $C$  entfernt werden kann, so daß der neu entstehende Satz zu  $\mathfrak{S}$  gehört. Kämen nun sämtliche Elemente von  $C$  in den antecedentia der andern Untersätze von  $X$  vor, so wäre  $C$  entgegen der Voraussetzung entbehrlich. Daher gibt es mindestens ein Element  $x$  von  $C$ , das in keinem andern antecedens eines Untersatzes von  $X$  vorkommt. Wird dieses gestrichen, so entsteht ein neuer Schluß, dessen Konklusion  $x$  nicht enthält. Die früher vorhandene Konklusion war also abundant.

70. (Definition.) Unter einem *inabundanten Beweis erster Art* verstehen wir einen Beweis ohne unmittelbare und ohne unreine Schlüsse, ohne tautologische Obersätze und ohne abundante Sätze.

71. (Definition.) Unter einem *inabundanten Beweis zweiter Art* verstehen wir einen Beweis ohne unmittelbare Schlüsse und ohne abundante und tautologische Sätze.

72. (Lehrsatz.) Ist  $\mathfrak{A}$  ein System unabundanter Axiome und  $e$  ein nicht dazu gehöriger unabundanter nicht-tautologischer Satz, so gibt es einen unabundanten Beweis erster Art für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$ .

Beweis. Ein nicht-tautologischer unabundanter Satz ist nicht trivial. Nach (68) gibt es also einen Normalbeweis ohne unreine Schlüsse für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$ , in dem keine entbehrlichen Komplexe, Obersätze und entbehrlichen Schlüsse vorkommen. Enthielte dieser einen abundanten Satz, so müßte es nach 69. zu diesem einen späteren geben, zu diesem wieder einen späteren usw., d. h. nach 67. wäre  $e$  gegen die Voraussetzung abundant. Nach 64. ist ferner kein Obersatz dieses Beweises tautologisch. Endlich können keine unmittelbaren Schlüsse in ihm vorkommen, denn in einem solchen müßte nach 66. die Konklusion in der Prämisse eigentlich enthalten, also abundant sein.

73. (Lehrsatz.) Ist  $\mathfrak{A}$  ein System unabundanter Axiome und  $e$  ein nicht dazu gehöriger nicht-tautologischer unabundanter Satz, so gibt es einen unabundanten Beweis zweiter Art für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$ .

Beweis. Nach 68. gibt es einen Normalbeweis  $\mathfrak{B}$  für  $e$  aus  $\mathfrak{A}$  ohne unreine Schlüsse, entbehrliche Komplexe, Obersätze und Schlüsse. Wie in 72. zeigen wir, daß er keine unabundanten Sätze und tautologischen Obersätze enthält. Ist  $u$  ein tautologischer verbundener Untersatz in dem zu  $\mathfrak{B}$  gehörigen Syllogismus  $\Sigma$ , so geht wie aus 18 und der Inabundanz der Konklusion von  $\Sigma$  folgt, durch Streichung von  $u$  aus  $\Sigma$  ein Syllogismus mit derselben Konklusion hervor (der aber ein unreiner Schluß sein kann). Wir streichen nun der Reihe nach je einen verbundenen tautologischen Untersatz; ist das nicht mehr möglich, so ist nach 66. überhaupt kein tautologischer Untersatz mehr vorhanden.

74. (Definition.) Unter einem *inabundanten Schlußsystem erster Art* verstehen wir ein Schlußsystem, das nur reine Syllogismen, keine abundanten Sätze und keine tautologischen Obersätze enthält.

75. (Definition.) Unter einem *inabundanten Schlußsystem zweiter Art* verstehen wir ein Schlußsystem, das nur Syllogismen, keine abundanten Sätze und keine tautologischen Sätze enthält.

76. (Lehrsatz.) Ist  $\mathfrak{A}$  ein System unabhängiger unabundanter Axiome und  $e$  ein nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehöriger nicht-tautologischer unabundanter Satz, so gibt es ein unabundantes Schlußsystem erster und eines zweiter Art, dessen unterste Konklusion  $e$  ist, und dessen oberste Sätze tautologisch sind oder zu  $\mathfrak{A}$  gehören.

Beweis. Aus 72., 73. und 50.

## § 5.

## Netze und Zyklen.

77. (Definition.) Sind  $A = (a_1 \dots a_n)$  und  $B = (b_1 \dots b_m)$  zwei Komplexe, so verstehen wir unter den Symbolen

$$A \rightarrow B$$

oder

$$(a_1 \dots a_n) \rightarrow [b_1 \dots b_m]$$

den Inbegriff von Sätzen

$$\begin{array}{l} (a_1 \dots a_n) \rightarrow b_1, \\ \vdots \\ (a_1 \dots a_n) \rightarrow b_m, \end{array}$$

durch die jedes einzelne Element von  $B$  als succedens zu  $(a_1 \dots a_n)$  gesetzt wird.

78. (Definition.) In bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem sagen wir, daß für  $\mathfrak{S}$  der Komplex  $B$  aus  $A$  folge, oder daß  $A \rightarrow B$  gelte, oder daß  $(a_1 \dots a_n) \rightarrow [b_1 \dots b_m]$  in  $\mathfrak{S}$  gelte, wenn  $\mathfrak{S}$  den Inbegriff von Sätzen  $(a_1 \dots a_n) \rightarrow [b_1 \dots b_m]$  enthält.

79. (Lehrsatz.) Kommt ein Satz  $(a_1 \dots a_n) \rightarrow b$  in einem abgeschlossenen Satzsystem  $\mathfrak{S}$  vor, so gilt  $(a_1 \dots a_n) \rightarrow [b]$  in  $\mathfrak{S}$ .

80. (Lehrsatz.) Besteht ein Schluß aus Sätzen eines abgeschlossenen Satzsystems  $\mathfrak{S}$ , so folgt das antecedens jeder seiner Prämissen aus dem antecedens seiner Konklusion.

Beweis. 1. Der Schluß sei unmittelbar und laute:

$$\frac{(g_1 g_2 \dots) \rightarrow k}{(g_1 g_2 \dots \gamma_1 \gamma_2 \dots) \rightarrow k},$$

dann gilt für  $\mathfrak{S}$

$$(g_1 g_2 \dots \gamma_1 \gamma_2 \dots) \rightarrow [g_1 g_2 \dots].$$

2. Der Schluß sei ein Syllogismus:

$$\begin{array}{l} (g_1^1 g_2^1 \dots) \rightarrow k^1 \\ (g_1^2 g_2^2 \dots) \rightarrow k^2 \\ \vdots \\ \parallel (k^1 k^2 \dots g_1 g_2 \dots) \rightarrow k \\ \parallel \left( \begin{array}{l} g_1^1 g_2^1 \dots \\ g_1^2 g_2^2 \dots \\ \vdots \end{array} \quad g_1 g_2 \dots \right) \rightarrow k \end{array}$$

dann gilt in  $\mathfrak{S}$

$$a) (g_1^1 g_2^1 \dots g_1^2 g_2^2 \dots g_1 g_2 \dots) \rightarrow [g_1^1 g_2^1 \dots],$$

$$b) (g_1^1 g_2^1 \dots g_1^2 g_2^2 \dots g_1 g_2 \dots) \rightarrow [k^1 k^2 \dots g_1 g_2 \dots].$$

81. (Definition.) In bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem nennen wir einen *Komplex abundant*, wenn es einen zu  $\mathcal{S}$  gehörigen nicht tautologischen Satz gibt, dessen antecedens und succedens aus Elementen des Komplexes bestehen. Ein nicht abundanter Komplex heißt *inabundant*.

Anmerkung. Im folgenden wird nun die Beziehung des Begriffes Abundanz usw. auf ein vorgelegtes abgeschlossenes Satzsystem nicht mehr erwähnt.

82. (Lehrsatz.) Jeder Teilkomplex eines unabundanten Komplexes ist unabundant.

83. (Lehrsatz.) Das antecedens eines unabundanten Satzes und jeder Teilkomplex dieses antecedens ist ein unabundanter Komplex.

84. (Lehrsatz.) Wir nennen zwei unabundante Komplexe *konjugiert*, wenn jeder aus dem andern folgt.

85. (Lehrsatz.) Sind zwei konjugierte Komplexe einem dritten konjugiert, so sind sie einander konjugiert.

86. (Lehrsatz.) Von zwei verschiedenen unabundanten konjugierten Komplexen kann keiner in dem andern enthalten sein.

Beweis. Wäre ein Komplex in dem andern enthalten, so wäre einer, z. B.  $(a_1 a_2 a_3 \dots)$ , in dem andern  $(a'_1 a'_2 a'_3 \dots a_1 a_2 a_3 \dots)$  eigentlich enthalten. Es müßte dann der Satz  $(a_1 a_2 a_3 \dots) \rightarrow a'_1$  zu unserem abgeschlossenen Satzsystem gehören. Der Komplex  $(a_1 a_2 a_3 \dots a'_1 a'_2 a'_3 \dots)$  wäre also abundant.

87. (Definition.) Wir nennen *Netz* einen Inbegriff verschiedener einander konjugierter unabundanter Komplexe.

88. (Definition.) Ist  $(a_1 \dots a_n)$  ein Komplex eines Netzes und  $b$  ein von den  $a$  verschiedenes Element eines anderen Netzkomplexes, so sagen wir von dem Satz  $(a_1 \dots a_n) \rightarrow b$ , er *gehöre zum Netz*.

89. (Definition.) Unter einem *Zyklus* verstehen wir ein System von zyklisch geordneten nicht tautologischen, unabundanten Sätzen von der Eigenschaft, daß das succedens jedes Satzes in dem antecedens des vorhergehenden Satzes enthalten ist.

90. (Definition.) Von einem Zyklus  $\mathcal{Z}$  sagen wir, er gehöre zu einem Netz  $\mathcal{N}$ , wenn für jeden seiner Sätze  $A \rightarrow e$ ,  $e$  Element eines Komplexes  $B$  von  $\mathcal{N}$  und  $A$  Teilkomplex eines von  $B$  verschiedenen Netzkomplexes ist.

91. (Lehrsatz.) Zu jedem Netz in einem abgeschlossenen Satzsystem  $\mathcal{S}$  gibt es einen zugehörigen Zyklus.

Beweis. Seien  $(x_1 x_2 \dots a_1 a_2 \dots)$  und  $(x_1 x_2 \dots b_1 b_2 \dots)$  zwei verschiedene Komplexe unseres Netzes, wo  $x_1 x_2 \dots$  die etwa gleichlautenden



Elemente in den Komplexen bedeuten, und die  $a$  bzw.  $b$  die nur in je einem Komplex enthaltenen Elemente. Nach 86. können weder die Elemente  $a$  noch die Elemente  $b$  fehlen. Nun gehört der Satz  $(x_1 x_2 \dots a_1 a_2 \dots) \rightarrow b_1$  zu unserem abgeschlossenen Satzsystem; er muß also in einem ebenfalls zu unserem Satzsystem gehörigen inabundanten Satz enthalten sein, und zwar, da er nicht trivial ist, in einem nicht tautologischen. Dessen antecedens kann nun nicht nur aus Elementen  $x$  bestehen, weil sonst der Komplex  $(x_1 x_2 \dots b_1 b_2 \dots)$  abundant wäre, was er als Netzkomplex nicht sein kann. Es gibt also in  $\mathcal{S}$  einen inabundanten nicht-tautologischen Satz  $(x'_1 x'_2 \dots a'_1 a'_2 \dots) \rightarrow b_1$ , wo die  $x'$  zu den  $x$ , die  $a'$  zu den  $a$  gehören, und die  $x'$  auch fehlen können. Ebenso nun gibt es in  $\mathcal{S}$  einen nicht-tautologischen inabundanten Satz  $(x''_1 x''_2 \dots b'_1 b'_2 \dots) \rightarrow a'_1$ , wo wieder nicht alle  $b'$  fehlen können, und die  $b'$  zu den  $b$  gehören. Ferner gibt es in  $\mathcal{S}$  einen inabundanten Satz  $(x'''_1 x'''_2 \dots a''_1 a''_2 \dots) \rightarrow b'_1$  usw.

Auf diese Weise erhält man eine Reihe von nicht-tautologischen inabundanten Sätzen, derart, daß das succedens jedes Satzes in dem antecedens des vorhergehenden enthalten ist. Da aber für  $\mathcal{S}$  nur endlich viel Sätze möglich sind, so müssen in dieser Reihe zwei gleichlautende  $e'$ ,  $e''$  vorkommen, die, weil  $(a_1 a_2 \dots)$  und  $(b_1 b_2 \dots)$  elementenfremde Komplexe sind, nicht unmittelbar aufeinander folgen. Die Reihe dieser Sätze können wir nun zyklisch ordnen, indem wir mit  $e'$  beginnen, die Reihe durchlaufen und für  $e''$  wieder  $e'$  setzen. Dadurch gelangen wir zu einem Zyklus.

### § 6.

#### Eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Wahl von unabhängigen Axiomensystemen.

92. (Lehrsatz.) Gibt es für ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathcal{S}$  mehrere unabhängige Systeme inabundanter Axiome, so gibt es in mindestens einem inabundanten primitiven, zu  $\mathcal{S}$  gehörigen Schlußsystem zweiter Art eine Teilkette, die nicht nur gleichlautende Sätze besitzt, deren oberster und unterster Satz aber gleichlautend sind.

Beweis. Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  zwei verschiedene unabhängige Systeme inabundanter Axiome für  $\mathcal{S}$  und gehöre der Satz  $a$  zu  $\mathcal{A}$ , aber nicht zu  $\mathcal{A}'$ . Dann gibt es einen Beweis für  $a$  aus  $\mathcal{A}'$ . Da nun  $a$  nach Voraussetzung inabundant ist, so gibt es nach 76. ein inabundantes primitives Schlußsystem zweiter Art  $\Sigma_0$ , dessen unterster Satz  $a$  ist und dessen oberste Sätze — nennen wir sie  $a'_1 \dots a'_k$  — zu  $\mathcal{A}'$  gehören. Da weiter jeder dieser Sätze  $a'_i$  sich aus  $\mathcal{A}$  beweisen läßt, so gibt es zu jedem  $a'_i$  ein inabundantes primitives Schlußsystem zweiter Art  $\Sigma_i$ , dessen unterste Konklusion  $a'_i$  ist, und dessen oberste Sätze zu  $\mathcal{A}$  gehören. Betrachten wir



nun den Inbegriff der Schlußsysteme  $\Sigma_0$  und  $\Sigma'$ . Sie bilden zusammen ein primitives inabundantes Schlußsystem  $\Sigma$  zweiter Art, wenn wir darin dieselben Zuordnungen bestehen lassen, die früher einzeln in  $\Sigma_0$  und den  $\Sigma_i$  bestanden, und außerdem jedem obersten Satz  $a'_i$  von  $\Sigma_0$  die unterste Konklusion von  $\Sigma'_i$  zuordnen. Gehörte nun  $a$  nicht zu den obersten Sätzen von  $\Sigma$ , so wäre  $\mathfrak{A}$  nicht unabhängig. Es gibt also nach 47. eine Teilkette, in der  $a$  unterster und oberster Satz ist; da aber diese Teilkette auch einen obersten Satz von  $\mathfrak{A}'$  besitzt, so besteht sie wenigstens aus drei Sätzen, und mindestens ein Satz, nämlich der zu  $\mathfrak{A}'$  gehörige, ist von  $a$  verschieden.

93. (Lehrsatz.) Gibt es ein aus Syllogismen eines abgeschlossenen Satzsystems  $\mathfrak{S}$  bestehendes inabundantes Schlußsystem zweiter Art und darin eine Teilkette  $\mathfrak{K}$ , die nicht aus lauter gleichlautenden Sätzen besteht, deren antecedentia aber alle gleichlautend sind und deren oberster und unterster Satz gleichlautend sind, so enthält  $\mathfrak{S}$  einen Zyklus.

Beweis. Wir wählen aus  $\mathfrak{K}$  eine Reihe  $\mathfrak{K}'$  von Sätzen dadurch aus, daß wir von jeder Gruppe aufeinanderfolgender gleichlautender Sätze nur einen beibehalten.  $\mathfrak{K}'$  muß mindestens drei Sätze enthalten. Dann haben in  $\mathfrak{K}'$  zwei aufeinanderfolgende Sätze gewiß verschiedenes succedens, und jeder Satz, ausgenommen der oberste, ist Konklusion in einem Schluß, in dem der nächst höhere als Prämisse vorkommt. Seien also  $e$ ,  $e'$  zwei aufeinanderfolgende Sätze, und zwar  $e'$  der höhere. Dann kann  $e'$  nicht Obersatz zu  $e$  sein, weil sonst  $e'$  und  $e$  dasselbe succedens hätten, also ist  $e'$  Untersatz in einem Schluß, in dem  $e$  Konklusion ist. Bezeichnen wir nun mit  $e_1 e_2 \dots e_n = e_1$  die Sätze der Teilkette  $\mathfrak{K}'$  von unten nach oben geordnet, und mit  $e_1 e_2 \dots e_n = e_1$  die zugehörigen succedentia, so muß in dem Schluß, in dem  $e_i$  die Konklusion und  $e_{i+1}$  ein Untersatz ist, der Obersatz die Form haben:

$$(a'_1 a'_2 \dots a'_{i+1}) \rightarrow e_i.$$

Die Reihe der Obersätze lautet also:

$$\begin{aligned} (a'_1 a'_2 \dots a'_3) &\rightarrow e_1 \\ (a'_2 a'_3 \dots a'_4) &\rightarrow e_2 \\ &\dots \dots \dots \\ (a'_{n-1} a'_n \dots a'_1) &\rightarrow e_{n-1} \end{aligned}$$

und bildet also, da  $e_n = e_1$  ist, einen Zyklus.

94. (Lehrsatz.) Gibt es für ein abgeschlossenes Satzsystem  $\mathfrak{S}$  mehrere unabhängige Systeme inabundanter Axiome, so gibt es einen aus Sätzen von  $\mathfrak{S}$  bestehenden Zyklus.

Beweis. Nach 92. gibt es ein inabundantes Schlußsystem zweiter Art  $\Sigma$  und darin eine Teilkette  $\mathfrak{K}$ , die nicht nur gleichlautende Sätze besitzt, deren oberster und unterster Satz aber gleichlautend sind. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

a) Alle Sätze von  $\mathfrak{K}$  haben dasselbe antecedens. Dann folgt die Behauptung aus 93.

b) Nicht alle Sätze von  $\mathfrak{K}$  haben dasselbe antecedens.

Seien dann  $U^1, U^2, U^3, \dots$  die antecedentia der Sätze von  $\mathfrak{K}$  der Reihe nach von unten nach oben geordnet, so gilt in  $\mathfrak{S}$  nach 80.  $U^1 \rightarrow U^2, U^2 \rightarrow U^3, \dots$ . Da aber der erste und letzte Komplex einander gleich sind, so folgt jeder aus jedem. Als antecedentia inabundanter Sätze sind ferner die  $U$  nach 83. inabundant, also sind die voneinander verschiedenen konjugiert. Aber nach der Voraussetzung gibt es mindestens zwei verschiedene  $U$ , diese bilden somit ein Netz, und daher gibt es, nach 91., einen zu  $\mathfrak{S}$  gehörigen Zyklus.

95. (Lehrsatz.) Dafür, daß ein abgeschlossenes Satzsystem nur ein unabhängiges System inabundanter Axiome besitzt, ist hinreichende Bedingung, daß in ihm kein Zyklus vorkommt.

Beweis aus 94.

Göttingen, 20. 5. 22.

(Eingegangen am 2. 6. 1922.)

## Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I.

Von

Karl Löwner in Berlin.

Die Entdeckung des Verzerrungssatzes durch Koebe war der Ausgangspunkt einer Reihe von Untersuchungen, die sich zur Aufgabe stellen, den Einfluß zu ermitteln, den die Forderung der Schlichtheit einer konformen Abbildung auf den Verlauf der sie darstellenden Funktion ausübt<sup>1)</sup>. Von besonderem Interesse ist die Frage, welche Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer Potenzreihe

$$(1) \quad z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \dots$$

bestehen müssen, wenn sie den Einheitskreis schlicht abbildet. Das wichtigste in dieser Richtung bisher erzielte Resultat besteht in der Ungleichung  $|b_1| \leq 2$  (erreichbar nur bei den Funktionen  $\frac{z}{(1-az)^2}$ ,  $|a| = 1$ <sup>2)</sup>).

In der vorliegenden Arbeit wird diese von neuem abgeleitet und werden darüber hinausgehende Resultate erzielt. Insbesondere wird gezeigt, daß  $|b_2| \leq 3$  ist. (Wieder ist die Schranke nur bei den oben angegebenen Funktionen erreichbar.)

Das charakteristische Merkmal der angewandten Untersuchungsmethode besteht in der Ausnützung des Umstandes, daß bei Zusammensetzung von schlichten konformen Abbildungen wieder eine schlichte Abbildung entsteht, daß also die schlichten Abbildungen eine Gruppe bilden.

<sup>1)</sup> Siehe insbesondere Pick, G.: Leipz. Ber. 1916, S. 58–64 und Wien. Ber. 1917, Abtlg IIa, 126, S. 247–263; Bieberbach, L.: Sitzber. kgl. Akad. Berlin 1916, S. 940–955; Faber, G.: Münch. Ber. 1916, S. 39–42 und 1920, S. 49–64.

<sup>2)</sup> Siehe die in <sup>1)</sup> zit. Arbeit von L. Bieberbach.

# 1. Zusammensetzung von beschränkten schlichten Abbildungen des Einheitskreises.

Es sei

$$(2) \quad w = f(z) = z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \dots$$

eine Potenzreihe, die das Innere des E. K.<sup>\*)</sup> schlicht abbildet. Wir machen außerdem die unwesentliche Voraussetzung, daß  $|f(z)|$  beschränkt ist. Wenn man  $f(z)$  mit einer positiven Konstanten  $\beta$  multipliziert, die nicht größer ist als der reziproke Wert der oberen Grenze  $M$  von  $|f(z)|$  im E. K., so entsteht eine Funktion

$$(3) \quad b(z) = \beta(z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \dots),$$

die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Sie bildet das Innere des E. K. schlicht ab auf einen Bereich  $\mathfrak{B}$ , der ganz im Innern des E. K. enthalten ist.

2. Es ist  $b(0) = 0$ ;  $b'(0) = \beta > 0$ , geometrisch gesprochen: der Nullpunkt bleibt fest und auch die Richtungen daselbst.

Aus 2. folgt bekanntlich mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas, daß sogar

$$(4) \quad \beta \leq 1$$

sein muß, und daß das Gleichheitszeichen nur für die Funktion  $b(z) = z$  eintreten kann.

Abbildungen mit den Eigenschaften 1 und 2 — und nur solche sollen jetzt betrachtet werden — wollen wir kurz beschränkte Abbildungen nennen.

Es seien nun  $b_\mu(z)$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ )  $n$  Funktionen mit den Anfangskoeffizienten  $\beta_\mu$ , die alle eine beschränkte Abbildung des E. K. liefern. Dann ist dasselbe auch bei der zusammengesetzten Funktion

$$(5) \quad b(z) = b_n(\dots b_2(b_1(z)))$$

der Fall. Ihr Anfangskoeffizient  $\beta$  hat den Wert

$$(6) \quad \beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n.$$

Aus der Ungleichung (4) schließen wir, daß

$$(7) \quad \beta \leq \beta_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

sein muß, und daß das Gleichheitszeichen nur dann eintreten kann, wenn sich alle  $b_\nu(z)$  ( $\nu \neq \mu$ ) auf  $z$  reduzieren.

Es liegt nun die Frage nahe: Gegeben sei eine beschränkte Abbildung  $b(z)$  mit dem Anfangskoeffizienten  $\beta < 1$  und  $n$  positive Konstanten  $\beta_\mu$ , die ebenfalls alle  $< 1$  sind und die zum Produkt  $\beta$  ergeben.

\*) E. K. = Abkürzung für Einheitskreis.

Gibt es beschränkte Abbildungen  $b_\mu(z)$  mit den Anfangskoeffizienten  $\beta_\mu$ , die zusammengesetzt  $b(z)$  ergeben?

*Daß diese Frage zu bejahen ist und die Funktionen  $b_\mu(z)$  im allgemeinen auf unendlich viele Arten gewählt werden können, soll jetzt bewiesen werden. Zu dem Zwecke diene folgende einfache Vorbetrachtung: Die aus  $n$  gegebenen beschränkten Abbildungen  $b_\mu(z)$  durch Zusammensetzung entstehenden beschränkten Abbildungen*

$$(8) \quad c_n(z) = b_n(\dots b_{\mu+1}(b_\mu(z)))$$

liefern Bildbereiche  $\mathbb{G}_n$ , die folgende Bedingung erfüllen: *Es ist  $\mathbb{G}_\beta$  in  $\mathbb{G}_\alpha$  enthalten, wenn  $\alpha > \beta$ . Die Anfangskoeffizienten  $\gamma_\mu$  der  $c_\mu(z)$  berechnen sich aus den  $\beta$  nach der Gleichung*

$$(9) \quad \gamma_n = \beta_n \beta_{n+1} \dots \beta_\infty.$$

Umgekehrt: Sind die Bildbereiche  $\mathbb{G}_\mu$  von  $n$  gegebenen beschränkten Abbildungen  $c_\mu(z)$  so ineinander eingeschachtelt, wie eben beschrieben worden ist, so liefern die durch Auflösung der Gleichung (8) eindeutig gewonnenen Funktionen

$$(8') \quad b_\mu(z) = c_{\mu+1}^{-1}(c_\mu(z)) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n; c_{n+1}(z) = z)^4$$

offenbar wieder beschränkte Abbildungen, deren Anfangskoeffizienten  $\beta_\mu$  aus den  $\gamma_\mu$  sich auf Grund der Gleichung (9) ergeben.

An Stelle also bei der oben aufgeworfenen Frage die Funktionen  $b_\mu(z)$  zu suchen, ist es offenbar zweckmäßiger, auf Konstruktion von Funktionen  $c_\mu(z)$  bzw. der zugehörigen Bereiche  $\mathbb{G}_\mu$  auszugehen.

Im Falle, daß der zur Funktion  $b(z)$  gehörige Bereich  $\mathfrak{B}$  von einer Jordankurve  $\mathfrak{J}$  begrenzt ist, die ganz im Innern des E. K. gelegen ist, kann man folgendermaßen verfahren: Man bilde den von  $\mathfrak{J}$  und der Peripherie des E. K. begrenzten Ringbereich auf einen gewöhnlichen Kreisring so ab, daß etwa  $\mathfrak{J}$  in den innern, die Peripherie des E. K. in den äußern Begrenzungskreis desselben übergeht. Den zu den Begrenzungskreisen konzentrischen im Kreisring verlaufenden Kreisen entspricht in unserem Ringbereich eine Schar von ineinander eingeschachtelten Jordankurven  $\mathfrak{J}_r$ , die vom Radius  $r$  des Bildkreises stetig abhängen. Es hängen deshalb auch die Abbildungsfunktionen  $c_r(z)$  auf die von den  $\mathfrak{J}_r$  begrenzten Jordanbereiche mit allen ihren Ableitungen nach  $z$  stetig von  $r$  ab. Insbesondere durchläuft somit der Anfangskoeffizient  $\gamma_r$  von  $c_r(z)$  mit wachsendem  $r$  *monoton alle Werte von  $\beta$  bis 1, und nimmt also auch die Werte (9) an. Die zugehörigen Jordanbereiche können als Bereiche  $\mathbb{G}_r$  verwendet werden.*

<sup>4)</sup> Der Exponent  $-1$  ist Zeichen für die Umkehrfunktion.

Den Fall eines allgemeinen Bereiches  $\mathfrak{B}$  kann man nach bekannten Methoden dadurch erledigen, daß man ihn durch Jordanbereiche approximiert; doch wollen wir nicht auf Einzelheiten eingehen, da davon im folgenden kein Gebrauch gemacht wird. Es sei nur noch der folgende wichtige Grenzfall besonders hervorgehoben, der in späteren Überlegungen eine wichtige Rolle spielen wird: Der Bereich  $\mathfrak{B}$  möge aus dem E. K. dadurch hervorgehen, daß man letzteren längs eines von der Peripherie ausgehenden Jordanbogens  $S$  aufschneidet, der den Nullpunkt nicht enthält. Bereiche dieser Art nennen wir *beschränkte Schlitzbereiche*. Diese sind deshalb von besonderem Interesse, weil hier die Bereiche  $\mathfrak{C}_\mu$  nur auf eine einzige Art gewählt werden können. Denn sie müssen offenbar wieder Schlitzbereiche sein, deren Schlitz  $S_\mu$  aus  $S$  durch passende Verkürzung entstehen. Daß sie auch tatsächlich entsprechend der Forderung (9) gewählt werden können, fließt aus der Tatsache, daß bei kontinuierlicher Verkürzung von  $S$  sich auch die zugehörige Abbildungsfunktion stetig ändert.

Nun kann man aber auch genau so wie mit Jordanbereichen mit Schlitzabbildungen die allgemeinsten beschränkten Abbildungen mit beliebiger Genauigkeit approximieren. Es genügt, wenn dies für Jordanbereiche gezeigt wird, die mitsamt ihrer Randkurve  $\mathfrak{J}$  dem Innern des E. K. angehören. Wir konstruieren einen Schlitzbereich, dessen Schlitz von einem willkürlich gewählten Punkt der Peripherie des E. K. zu einem willkürlichen Punkt  $P$  von  $\mathfrak{J}$  führt und von hier aus weiter auf  $\mathfrak{J}$  bis zu einem Punkt  $Q$  in der Nähe von  $P$  zurück. Läßt man  $Q$  gegen  $P$  rücken, so konvergiert die zugehörige Schlitzabbildung in jedem abgeschlossenen Teil des Innern des E. K. gleichmäßig gegen die Abbildung auf das Innere von  $\mathfrak{J}$ .<sup>5)</sup>

Die bisherigen Überlegungen zeigen, daß man eine Funktion  $b(z)$  zusammensetzen kann aus Funktionen  $b_\mu(z)$ , deren Anfangskoeffizienten  $\beta_\mu$  beliebig wenig von 1 abweichen. Man braucht z. B. nur  $\beta_\mu = \sqrt[n]{\beta}$  zu setzen und  $n$  genügend groß zu wählen. Nun weicht aber eine beschränkte Funktion  $b(z)$  um so weniger von  $z$  ab, je weniger sich  $\beta$  von 1 unterscheidet. Dies ist eine einfache Folgerung aus dem Schwarzschen Lemma: Mit  $\tilde{b}(z)$  ist nämlich auch

$$(10) \quad \frac{\frac{b(z)}{z} - \beta}{1 - \frac{\overline{b(z)}}{z} \beta}$$

im Einheitskreis dem Betrage nach  $\leq 1$  und 0 für  $z = 0$  und somit

<sup>5)</sup> Vgl. Carathéodory, C.: Math. Ann. 72, S. 107 ff.; Bieberbach, L.: Gött. Nachr. 1913, S. 1–9.

$$(11) \quad \left| \frac{\frac{b(z)}{z} - \beta}{1 - \frac{b(z)}{z} \beta} \right| \leq |z|,$$

woraus sich leicht ergibt

$$(12) \quad \left| \frac{b(z)}{z} - \beta \right| \leq (1 - \beta^2) \frac{|z|}{1 - |z| \beta}.$$

Daraus ist die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar zu ersehen. Wir nützen dies aus, indem wir zu „infinitesimalen beschränkten Abbildungen“ übergehen.

## 2. Infinitesimale beschränkte Abbildungen.

Es sei

$$(13) \quad f(z, t) = \beta(t) \{ z + b_1(t) z^2 + b_2(t) z^3 + \dots \}$$

eine von einem reellen Parameter  $t$  gleichmäßig stetig abhängende Funktion von  $z$  ( $|z| < 1$ ), die für jeden Wert von  $t$  des Intervalls  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $t_0 > 0$  eine beschränkte Abbildung liefert, speziell für  $t = 0$  die Identität.

Wir machen außerdem die Voraussetzung, daß  $\frac{\partial f(z, t)}{\partial t}$  existiert und stetig ist in  $z$  und  $t$ . (Es existieren dann von selbst alle Ableitungen nach  $z$  und  $t$ , die eine einmalige Differentiation nach  $t$  enthalten. Sie sind stetig in beiden Variablen und von der Reihenfolge der Differentiation unabhängig.) Insbesondere interessiert uns der Wert

$$(14) \quad \left( \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} \right)_{t=0} = V(z).$$

Deutet man  $t$  als Zeitparameter, so stellt die Funktion  $f(z, t)$  eine Strömung dar. Sie gibt an, wohin der Punkt, der zur Zeit  $t=0$  die Lage  $z$  ( $|z| < 1$ ) einnimmt, in der Zeit  $t$  gelangt ist, und  $V(z)$  ist das Geschwindigkeitsfeld in dem Moment, wo sich der E. K. zusammenzuziehen beginnt. Durch eine Funktion  $V(z)$ , die auf diese Weise entstanden gedacht werden kann, denken wir uns eine infinitesimale beschränkte Abbildung gegeben. Welche Eigenschaften muß  $V(z)$  besitzen, damit dies der Fall ist? Diese Frage kann man leicht beantworten: Nach dem Schwarzschen Lemma ist  $|f(z, t)| \leq |z|$  identisch in  $t$ . Es schließt somit  $V(z)$  mit der Richtung  $z \rightarrow 0$  einen Winkel  $\leq \frac{\pi}{2}$  ein, anders ausgedrückt, die Funktion

$$(15) \quad p(z) = -\frac{V(z)}{z}$$

hat für  $|z| < 1$  einen nicht-negativen Realteil. Da außerdem der Nullpunkt und die Richtungen durch ihn bei der Strömung festbleiben, so

muß  $V(0) = 0$  und  $V'(0)$  reell sein und es ist somit  $p(z)$  für  $|z| < 1$  *durchaus regulär und im Nullpunkt reell.*

*Die abgeleiteten notwendigen Bedingungen für die Funktion  $p(z)$  erweisen sich aber auch als hinreichend dafür, daß*

$$(16) \quad V(z) = -zp(z)$$

*eine infinitesimale beschränkte Abbildung darstellt.* Um dies einzusehen, betrachten wir die zugehörige stationäre Strömung definiert durch die Differentialgleichung

$$(17') \quad \frac{dw}{dt} = -wp(w),$$

oder lieber gleich eine Differentialgleichung von der Form

$$(17) \quad \frac{dw}{dt} = -wp(w, t),$$

worin  $p(w, t)$  eine für  $|w| < 1$ ,  $0 \leq t \leq t_0$  definierte stetige Funktion bedeutet, die für jeden Wert von  $t$  die oben von  $p(z)$  geforderten Eigenschaften hat. Es sei

$$(18) \quad \begin{aligned} w &= f(z, t) \\ f(z, 0) &= z \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} |z| < 1 \\ 0 \leq t \leq t_0 \end{array} \right)$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (17). Aus der besonderen Natur des Geschwindigkeitsfeldes ergibt sich unmittelbar, daß  $|f(z, t)|$  bei festem  $z$  eine mit wachsendem  $t$  abnehmende (oder wenigstens nicht zunehmende) Funktion von  $t$  darstellt. Es kann somit der Punkt  $f(z, t)$  bei wachsendem  $t$  nicht aus dem Regularitätsgebiet der Differentialgleichung heraustreten. Da außerdem verschiedenen Anfangswerten  $z$  auch verschiedene Werte  $w$  zur Zeit  $t$  entsprechen müssen, so stellt (18) für jeden Wert von  $t$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ) eine beschränkte schlichte Abbildung dar. (Es sind offenbar auch die Bedingungen im Nullpunkt erfüllt, die wir an eine solche stellen.)

Nun erhebt sich ähnlich wie im ersten Paragraphen die Frage: Ist es möglich, eine gegebene beschränkte Abbildung aus infinitesimalen beschränkten Abbildungen zusammensetzen, präziser ausgedrückt, ist es möglich, eine Funktion  $p(w, t)$  so zu bestimmen, daß die Lösung der Differentialgleichung (17) für  $t = t_0$  die gegebene Abbildung ergibt, oder ist es vielleicht sogar möglich, sie schon durch eine stationäre Strömung (17') zu erzeugen? Wie wir im folgenden sehen werden, ist das erstere wenigstens in dem Sinne richtig, daß die so erzeugten Abbildungen hinreichen, um alle beschränkten Abbildungen mit beliebiger Genauigkeit zu approximieren, ja daß es sogar für diesen Zweck genügt, wenn man Differentialgleichungen von der Gestalt

$$(19) \quad \frac{dw}{dt} = -w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w}$$



verwendet, worin  $\kappa(t)$  eine stetige Funktion vom Betrag 1 bedeutet. Zu den so erzeugten Abbildungen gehören insbesondere die beschränkten Schlitzabbildungen, wie im § 3–5 gezeigt werden soll und die, wie wir wissen, bereits zur Approximation allgemeiner beschränkter Abbildungen hinreichen. Die Zusatzfrage dagegen ist zu verneinen. Um das letztere einzusehen, stellen wir die Lösung der Gl. (17') wirklich her, was durch Trennung der Variablen bewerkstelligt werden kann. Dabei können wir den Fall  $p(0) = 0$  ausschließen, da dann  $p(z) \equiv 0$  sein müßte, somit überhaupt keine Strömung stattfände. Die Zeiteinheit ändern wir nun in der Weise ab, daß  $p(0) = 1$  wird. Setzt man dann

$$\int \frac{dw}{wp(w)} = \log F(w)$$

$$F(w) = w + \dots$$

so lautet die allgemeine Lösung von (17')

$$F(w) = F(z) e^{-t} \quad (t \geq 0).$$

Da die Beziehung besteht

$$\frac{z F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{p(z)}$$

und  $\frac{1}{p(z)}$  mit  $p(z)$  ebenfalls positiven Realteil besitzt, so bildet  $F(z)$  den E. K. auf einen sogenannten *Sternbereich* ab, d. h. einen Bereich, der von jeder Geraden durch den Nullpunkt, der selbst dem Bildbereich angehört, in einer einzigen Strecke geschnitten wird<sup>6)</sup>. Die Abbildung  $z \rightarrow w$  kommt also dadurch zustande, daß man zuerst eine Sternabbildung ausführt, hierauf den Stern im Verhältnis  $1 : e^{-t}$  ähnlich verkleinert und schließlich durch die Inverse der Sternabbildung in den E. K. zurückkehrt. Man kann also die so entstehenden beschränkten Bereiche ebenfalls als Sternbereiche und zwar relativ zu den im Nullpunkt einmündenden Strömungslinien ansehen; da längs der letzteren die Distanz vom Nullpunkt eine *monotone Funktion* ist, so erkennt man deutlich, daß die durch stationäre Strömungen erzeugten Abbildungen nicht ausreichen, um zur Approximation für allgemeine Abbildungen zu dienen. Wir merken noch die interessante Limesrelation an:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(z, t)}{e^{-t}} = F(z).$$

### 3. Erzeugung von beschränkten Schlitzabbildungen aus infinitesimalen Transformationen.

Wir schicken zuerst einige allgemeinere Betrachtungen voraus, die denen des § 1 analog sind. Es sei  $w_t = f(z, t)$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ) eine einpara-

<sup>6)</sup> Vgl. etwa K. Löwner: Leipz. Ber. 1917, S. 8.

metrige Schar von beschränkten Abbildungen mit Bildbereichen  $\mathfrak{B}_t$ , die den beiden Forderungen genügt:

1. Es ist

$$(20) \quad w_0 = f(z, 0) = z.$$

2. Für jedes Paar von Parameterwerten  $t', t''$  ( $0 \leq t' < t'' \leq t_0$ ) sei

$$(21) \quad w_{t''} = w_{t'}(w_{t'}) \quad (|w_{t'}| < 1)$$

ebenfalls eine beschränkte Abbildung von  $|w_{t'}| < 1$ .

Diese Bedingungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn  $f(z, t)$  aus infinitesimalen beschränkten Abbildungen erzeugt ist; denn die Abbildung (21) entsteht ja dann, indem man die Strömung auf das Zeitintervall  $t' \leq t \leq t''$  beschränkt. Setzt man insbesondere  $t'' = t_0$  und schreibt für  $w_{t'}$   $z$  und für  $w_{t_0}$   $w$ , so entsteht eine neue einparametrische Abbildungsschar

$$(22) \quad w = g(z, t),$$

die auf Grund der Forderungen 1 und 2 für  $f(z, t)$  den Bedingungen genügt:

$$1^*. \quad g(z, t_0) = z.$$

2\*. Die Bereiche  $\mathfrak{G}_t$ , die durch  $g(z, t)$  aus dem E. K. hervorgehen, wachsen mit wachsendem  $t$  in dem Sinne, daß  $\mathfrak{G}_{t''}$  immer  $\mathfrak{G}_{t'}$  enthält, wenn  $t'' > t'$ .

Umgekehrt: Erfüllt die Abbildungsschar  $g(z, t)$  die Bedingungen 1\* und 2\*, so erfüllt die durch sie eindeutig bestimmte Abbildungsschar

$$(23) \quad f(z, t) = g^{-1}(g(z, 0), t)$$

offenbar die Bedingungen 1 und 2.

Es sei außerdem noch bemerkt, daß die Stetigkeit von  $g(z, t)$  in beiden Variablen  $z$  und  $t$  die Stetigkeit von  $f(z, t)$  und umgekehrt nach sich zieht. Das erstere ist aus Gleichung (23) und der Forderung 2\* unmittelbar zu ersehen. Um das letztere einzusehen, wenden wir das Schwarzsche Lemma auf die Funktion (21) an und erhalten auf Grund von (12)

$$(24) \quad \left| \frac{w_{t''}}{w_{t'}} - \beta(t', t'') \right| \leq (1 - \beta^2(t', t'')) \frac{|w_{t'}|}{1 - |w_{t'}|}.$$

Darin ist

$$(25) \quad \beta(t', t'') = \frac{\beta(t'')}{\beta(t')}.$$

Dies und die Stetigkeit von  $\beta(t)$  zeigt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Wir verlangen nun insbesondere, daß  $f(z, t_0) = g(z, 0)$  einen vorgeschriebenen Schlitzbereich  $\mathfrak{B}$  mit dem Schlitz  $S$  liefert. Dann ist,

*falls noch die Forderung der Stetigkeit von  $g(z, t)$  bzw.  $f(z, t)$  hinzutritt,  $g(z, t)$  offenbar bis auf stetige Parametertransformationen bestimmt. Es müssen dann nämlich  $\mathbb{C}_t$  wieder beschränkte Schlitzbereiche sein, mit einem Schlitz  $S_t$ , der mit wachsendem  $t$  sich kontinuierlich verkürzt und für  $t = 0$  mit  $S$  zusammenfällt. Man sieht hieraus, daß auch  $f(z, t)$  bis auf stetige Parametertransformationen eindeutig bestimmt ist und somit eine Schlitzabbildung, wenn überhaupt, so nur auf eine einzige Art durch infinitesimale beschränkte Abbildungen erzeugt werden kann. Um die Möglichkeit einzusehen, genügt es vollständig, zu beweisen, daß bei passender Parameterwahl die Funktion  $g(z, t)$  einen stetigen Differentialquotienten nach  $t$  besitzt.*

Über den Parameter  $t$  verfügen wir am einfachsten in folgender Weise. Es sei

$$(26) \quad g(z, t) = \gamma(t) \{z + c_1(t)z^2 + c_2(t)z^3 + \dots\}$$

die Potenzreihenentwicklung von  $g(z, t)$  nach  $z$ . Da die Bereiche  $\mathbb{C}_t$  mit wachsendem  $t$  stetig wachsen, so ist  $\gamma(t)$  ebenfalls eine stetige und monoton wachsende Funktion von  $t$ , die alle Werte des Intervalls  $\langle \beta \rangle$  durchläuft. Somit ist auch, wenn wieder

$$(27) \quad f(z, t) = \beta(t) \{z + b_1(t)z^2 + b_2(t)z^3 + \dots\}$$

gesetzt wird,  $\beta(t)$  eine stetige monoton abnehmende Funktion, die alle Werte desselben Intervalls, nur im umgekehrten Sinne, durchläuft. Es ist deshalb möglich, den Parameter durch die Forderung zu normieren:

$$(28) \quad \beta(t) = e^{-t}.$$

Der Wert  $t_0$  ist dann durch die Gleichung  $\beta = \beta(t_0) = e^{-t_0}$  gegeben. Wir zeigen, daß bei dieser Parameterwahl die Funktion  $f(z, t)$  die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung von der Form (19) ist. Zum Beweis haben wir einige Hilfssätze nötig, die im folgenden Paragraphen abgeleitet werden sollen.

#### 4. Hilfssätze über beschränkte Funktionen.

Es sei  $\varphi(z)$  eine für  $|z| < 1$  regulär analytische Funktion, die den Forderungen genügt:

1. Es ist  $\varphi(0) = 0$ .
2. Es ist  $|\varphi(z)| < 1$  für  $|z| < 1$  und
3.  $|\varphi(z)| = 1$  auf einem (offenen) Teilbogen  $B$  der Peripherie des E. K. von der Länge  $\beta$ , über den hinaus  $\varphi(z)$  dann analytisch fortsetzbar ist.

Durchläuft  $z$  den Bogen  $B$  im positiven Sinne, so bewegt sich auch  $\varphi(z)$  auf der Peripherie des E. K. im selben Sinne und beschreibt

einen Bogen  $C$ , dessen Länge mit  $\gamma$  bezeichnet werden möge. (Im Falle, daß  $\varphi(z)$  nicht schlicht abbildet, kann selbstverständlich  $\gamma$  größer als  $2\pi$  sein.) Es gilt nun der folgende Satz:

Hilfssatz I. *Genügt  $\varphi(z)$  den Forderungen 1, 2 und 3, so ist*

$$(29) \quad \gamma \geq \beta$$

*und nur dann gilt das Gleichheitszeichen, wenn*

$$(30) \quad \varphi(z) = \varphi'(0)z \quad (|\varphi'(0)| = 1).$$

Zum Beweise bilden wir die Funktion  $\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{z}$ , die ebenfalls die Eigenschaften 2 und 3 besitzt. Es ist deshalb der Zuwachs  $\gamma - \beta$  des arc  $\psi(z)$  auf  $B$  eine nicht negative Zahl und nur dann 0, wenn  $\psi(z)$  konstant ist.

Der Hilfssatz I läßt sich in folgender Weise verallgemeinern. Es sei jetzt  $\varphi(z)$  eine Funktion, die den Bedingungen 2 und 3, nicht aber notwendig auch der Bedingung 1 genügt. Es sei weiter  $a$  ein beliebiger Punkt im Innern des E. K. Wir setzen dann

$$(31) \quad z^* = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

$$(32) \quad \varphi^* = \frac{\varphi - \varphi(a)}{1 - \overline{\varphi(a)}\varphi}.$$

Die Funktion  $\varphi^*(z^*)$  befriedigt neben 2 und 3 auch die Forderung 1 mit dem Teilbogen  $B^*$  des E. K., der durch die Transformation (31) aus  $B$  hervorgeht. Es ist also, wenn entsprechende Größen mit einem \* bezeichnet werden,  $\gamma^* \geq \beta^*$  und nur dann  $= \beta^*$ , wenn  $\varphi(z)$  sich auf eine lineare Transformation reduziert, die den E. K. auf sich selbst abbildet. Die Größe  $\beta^*$  (und analog  $\gamma^*$ ) hat folgende geometrische Bedeutung: Es ist die Größe des Winkelraumes, der von den beiden  $a$  mit den Endpunkten von  $B$  verbindenden Orthogonalkreisbögen des E. K. und von  $B$  selbst begrenzt ist<sup>7)</sup>. Wir wollen  $\beta^*$  als den *Schwinkel* bezeichnen, unter dem  $B$  von  $a$  aus erscheint. Damit ist also bewiesen:

Hilfssatz II. *Genügt die Funktion  $\varphi(z)$  den Forderungen 2 und 3, so erscheint der Bildbogen  $C$  von  $B$  vom Punkte  $\varphi(a)$  aus unter einem Schwinkel, der nicht größer ist als der Schwinkel, unter dem  $B$  von  $a$  aus gesehen wird, wie auch  $a$  im Innern des E. K. gewählt sein möge. Das Gleichheitszeichen tritt nur ein, wenn  $\varphi(z)$  eine lineare Funktion ist, die den E. K. auf sich selbst abbildet.*

<sup>7)</sup> Im Falle, daß  $\gamma^* > 2\pi$ , muß man den zugehörigen Winkelraum als Teil einer Riemannschen Fläche auffassen, die in  $a$  einen Verzweigungspunkt besitzt.

Im Falle, daß die Länge  $\gamma$  von  $C < 2\pi$  ist, kann man dem Hilfsatz II auch folgende Formulierung geben: Es sei  $K$  der durch  $a$  gehende Kreisbogen, der die Endpunkte von  $B$  verbindend und im Innern des E. K. verläuft, und  $L$  ein entsprechender Kreisbogen für  $C$  und zwar derjenige, der mit  $C$  denselben Winkel einschließt wie  $K$  mit  $B$ . Dann liegt  $\varphi(a)$  in dem von  $C$  und  $L$  begrenzten Kreisbogenzweieck und nur dann auf dem Begrenzungsbogen  $L$ , wenn  $\varphi(z)$  eine lineare Funktion ist, die den E. K. auf sich selbst abbildet.

Wir wollen jetzt noch eine weitere Verallgemeinerung vornehmen, die zwar in folgenden nicht gebraucht wird, die aber an und für sich von Interesse ist. Es sei jetzt  $\varphi(z)$  eine Funktion, die die Bedingungen 2 und 3 erfüllt und für  $z = a_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, n, |a_\mu| < 1$ ) verschwindet. Dann genügt auch

$$\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{\prod_{\mu=1}^n \left( \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z} \right)}$$

den Bedingungen 2 und 3. Es ist somit die Zunahme von  $\arg \psi(z)$  auf  $B \geq 0$ , geometrisch gesprochen, es ist der Sehwinkel, unter dem  $C$  vom Nullpunkt aus erscheint,  $\geq$  der Summe der Sehwinkel, unter denen der Bogen  $B$  von den Punkten  $a_\mu$  aus gesehen wird. Durch lineare Transformation der Ebene von  $\varphi$  ergibt sich hieraus wie oben der folgende allgemeine Satz:

**Hilfssatz III.** Genügt die Funktion  $\varphi(z)$  den Bedingungen 2 und 3 und nimmt sie an  $n$  Stellen  $a_\mu$  im Innern des E. K. denselben Wert  $\alpha$  an, so erscheint der Bogen  $C$  von  $\alpha$  aus unter einem Sehwinkel, der mindestens gleich ist der Summe der Sehwinkel, unter denen der Bogen  $B$  von den Punkten  $a_\mu$  aus gesehen wird. Das Gleichheitszeichen tritt nur ein, wenn  $\varphi(z)$  den E. K. auf den  $n$ -fach überdeckten E. K. abbildet.

## 5. Fortsetzung der Untersuchung der beschränkten Schlitzabbildungen.

Wir kehren zurück zur Betrachtung der im § 3 konstruierten Funktion  $g(z, t)$  bzw.  $f(z, t)$  für beschränkte Schlitzabbildungen, wobei wir uns den Parameter  $t$  entsprechend der Gleichung (28) normiert denken und bilden die Funktion

$$(33) \quad h(z, t', t'') = g^{-1}(g(z, t'), t'') = f(f^{-1}(z, t'), t'') = e^{t' - t''} z + \dots$$

$$(0 \leq t' < t'' \leq t_0).$$

Nun läßt sich bekanntlich  $g(z, t)$  bei festem  $t$  zu einer stetigen Funktion im abgeschlossenen E. K.  $|z| \leq 1$  erweitern. Durchläuft  $z$  die Peripherie des E. K., so umläuft  $g(z, t)$  die gesamte Berandung von  $\mathfrak{G}_t$ , wobei der

Schlitz  $S_t$  in bekannter Weise doppelt zu zählen ist. Daraus ergibt sich aber sofort, daß  $h(z, t', t'')$  für jedes Wertepaar  $t', t''$  ebenfalls eine beschränkte Schlitzabbildung liefern muß. Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein: Es sei  $S_{t', t''}$  der zur Abbildung  $h(z, t', t'')$  gehörige Schlitz,  $\bar{B}_{t', t''}$  der Bogen auf dem E. K., aus dem  $S_{t', t''}$  hervorgegangen ist. Weiter sei  $K_{t', t''}$  der Orthogonalbogen des E. K., der die Endpunkte von  $\bar{B}_{t', t''}$  verbindet und im Innern des E. K. verläuft. Endlich sei  $\lambda(t)$  der Punkt auf dem E. K., dem bei der Abbildung  $g(z, t)$  der im Innern des E. K. gelegene Endpunkt von  $S_t$  entspricht.

Um spätere Überlegungen nicht unterbrechen zu müssen, sei jetzt schon folgendes festgestellt. Der innere Endpunkt von  $S_{t', t''}$  geht bei der Abbildung  $h(z, t', t'')$  aus dem (auf  $\bar{B}_{t', t''}$  gelegenen) Punkt  $\lambda(t')$  hervor. Der Punkt  $\lambda(t'')$  andererseits fällt mit dem Einmündungspunkt von  $S_{t', t''}$  auf dem E. K. zusammen. Bei Festhaltung von  $t'$  zieht sich beim Grenzübergang  $t'' \rightarrow t'$  der Bogen  $\bar{B}_{t', t''}$  auf dem Punkt  $\lambda(t')$  zusammen. Hält man dagegen  $t''$  fest, so schrumpft beim Grenzübergang  $t' \rightarrow t''$  der Schlitz  $S_{t', t''}$  auf den Punkt  $\lambda(t'')$  zusammen. Zusammenfassend können wir also sagen, daß bei Festhaltung eines der Werte  $t', t''$  beim Grenzübergang  $t'' - t' \rightarrow 0$  einer von den einander entsprechenden Kurvenbögen  $\bar{B}_{t', t''}, S_{t', t''}$  auf den Punkt  $\lambda(t)$  zusammenschrumpft, wenn man mit  $t$  den festgehaltenen  $t$ -Wert bezeichnet, was auch im folgenden stets geschehen soll. Wir werden jetzt zeigen, daß sich dann auch der andere Kurvenbogen auf denselben Punkt zusammenzieht und daraus weitere Schlüsse ziehen über die Differenzierbarkeit der Funktionen  $f(z, t)$  und  $g(z, t)$ .

1. Fall. (Der kleinere Parameterwert fest.) Die Funktion

$$(34'') \quad \varphi(z, t, t'') = \frac{h(z, t, t'')}{z} = e^{t-t''} + \dots$$

erfüllt die Bedingungen des Hilfssatzes II des vorigen Paragraphen, wenn darin für  $B$  der Komplementärbogen  $B_{t''}$  von  $\bar{B}_{t''}$  auf dem E. K. eingesetzt wird. (Allgemein wollen wir zwei Komplementärbögen auf dem E. K. mit demselben Buchstaben bezeichnen und einen von ihnen mit einem Querstrich versehen und analog bei Bereichen verfahren, in die der E. K. durch einen Querschnitt zerlegt wird.) Der Bogen  $B_{t''}$  habe die Länge  $\beta_{t''}$ . Sein Bildbogen  $C_{t''}$  bei der Abbildung  $\varphi(z, t, t'')$  hat also die Länge  $\gamma_{t''} = 2\pi - \beta_{t''}$ . Es gelten somit die Limesrelationen:

$$(35) \quad \gamma_{t''} \rightarrow 0 \quad \text{für } t'' \rightarrow t.$$

$$(36) \quad \varphi(0, t, t'') \rightarrow 1$$

Nun wenden wir auf  $\varphi(z, t, t'')$  den Hilfssatz II in der zweiten Formulierung an, wobei wir der Einfachheit halber  $z$  auf das von  $B_{ii''}$  und  $K_{ii''}$  begrenzte Kreisbogenzweieck  $\mathfrak{P}_{ii''}$  beschränken. Er besagt, daß dann  $\varphi(z, t, t'')$  in dem Kreisbogenzweieck  $\mathfrak{Q}_{ii''}$  gelegen sein muß, das zu  $C_{ii''}$  in derselben Beziehung steht, wie  $\mathfrak{P}_{ii''}$  zu  $B_{ii''}$ . Andererseits ist, wenn  $t''$  genügend nahe an  $t$  liegt, der Nullpunkt der  $z$ -Ebene in  $\mathfrak{P}_{ii''}$  gelegen und somit  $\varphi(0, t, t'') = e^{t-t''}$  in  $\mathfrak{Q}_{ii''}$ . Unser Hilfssatz lehrt nun im Verein mit (35) und (36), daß im ganzen  $\mathfrak{P}_{ii''}$  gleichmäßig

$$(37) \quad \varphi(z, t, t'') \rightarrow 1$$

geht, oder was damit gleichbedeutend ist,

$$(38) \quad h(z, t, t'') - z \rightarrow 0.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß Gleichung (37) bzw. (38) auch in  $\overline{\mathfrak{P}_{ii''}}$  gleichmäßig gültig ist. Da nämlich Gleichung (38) auch noch auf dem Kreisbogen  $K_{ii''}$  erfüllt ist, und somit dessen Bild bei der Abbildung  $h(z, t, t'')$  mit  $K_{ii''}$  auf den Punkt  $\lambda(t)$  zusammenschrumpft, muß auch wegen der Schlichtheit der Abbildung das Bild des (abgeschlossenen)  $\overline{\mathfrak{P}_{ii''}}$  als Ganzes gegen  $\lambda(t)$  konvergieren, womit die Gültigkeit von (38) im ganzen abgeschlossenen E. K. bewiesen ist.

Wir ziehen daraus insbesondere die Folgerung, daß  $\lambda(t'')$  gegen  $\lambda(t)$  konvergiert; anders ausgedrückt, es ist

$$(39'') \quad \lambda(t + 0) = \lambda(t).$$

2. Fall. (Der größere Parameterwert fest). Wir schließen  $S_{i',t}$  in ein Kreisbogenzweieck  $\mathfrak{R}_{i',t}$  ein, dessen Begrenzung ähnlich wie bei  $\mathfrak{P}_{i',t}$  aus einem Teilbogen des E. K.  $\overline{E}_{i',t}$  und dem zugehörigen Orthogonalkreisbogen  $L_{i',t}$  besteht. Wir können annehmen, daß beim Grenzübergang  $t' \rightarrow t$   $\mathfrak{R}_{i',t}$  mit  $S_{i',t}$  auf den Punkt  $\lambda(t)$  zusammenschrumpft. Durch die Inverse von  $h(z, t', t)$  wird  $\mathfrak{R}_{i',t}$  auf einen Teilbereich  $\mathfrak{S}_{i',t}$  des E. K. abgebildet, wobei aus  $E_{i',t}$  wieder ein Bogen der Peripherie des E. K. hervorgeht, der  $F_{i',t}$  heißen möge. Wir lassen dieser Abbildung die Abbildung des ganzen E. K. auf  $\mathfrak{R}_{i',t}$  vorangehen, bei der der Nullpunkt und die Richtungen durch ihn fest bleiben. (Diese Bedingung ist erfüllbar, wenn  $t'$  genügend nahe an  $t$  ist, weil dann der Nullpunkt in  $\mathfrak{R}_{i',t}$  gelegen ist.) Bei der zusammengesetzten Abbildung geht  $F_{i',t}$  aus einem zu  $\overline{E}_{i',t}$  symmetrischen Teilbogen  $D_{i',t}$  des E. K. hervor, dessen Komplement  $\overline{D}_{i',t}$ , wie eine elementare Rechnung zeigt, die doppelte Länge hat wie  $\overline{E}_{i',t}$  und somit beim Grenzübergang  $t' \rightarrow t$  sich auf den Punkt  $\lambda(t)$  zusammenzieht. Da aber  $F_{i',t}$  eine größere Länge haben muß als  $D_{i',t}$  und diese somit gegen  $2\pi$  konvergiert, so können wir dieselben Überlegungen wie im ersten Fall durchführen, welche zeigen, daß Gleichung (38) zuerst in  $\mathfrak{R}_{i',t}$  bzw.  $\mathfrak{S}_{i',t}$



gültig ist und somit, da die Bildkurve von  $L_{t'}$  mit  $L_{t''}$  auf den Punkt  $\lambda(t)$  zusammenschrumpft, wegen der Schlichtheit der Abbildung auch in  $\mathfrak{E}_{t'}$ .

Daraus ergibt sich wieder

$$(39') \quad \lambda(t-0) = \lambda(t).$$

Gleichung (39'') und Gleichung (39') zusammen lehren, daß  $\lambda(t)$  eine stetige Funktion von  $t$  ist.

Um uns endlich über die Differentiierbarkeit von  $f(z, t)$  und  $g(z, t)$  zu orientieren, bilden wir die Funktionen

$$(40) \quad \varphi_1(z, t', t'') = \frac{\varphi(z, t', t'') - \varphi(0, t', t'')}{1 - \varphi(0, t', t'') \varphi(z, t', t'')},$$

$$(41) \quad \varphi_2(z, t', t'') = \frac{1}{z} \varphi_1(z, t', t'').$$

Die Funktion  $\varphi_1$  läßt aus  $B_{t''}$  einen Bogen des E. K.  $C_{t', t''}^1$  hervorgehen, der folgende Eigenschaften hat: 1. ist er länger als  $B_{t', t''}$ , 2. enthält er bei jedem der oben behandelten Grenzübergänge, wenn die Differenz  $t'' - t'$  genügend klein geworden ist, den Punkt  $-1$  nicht, da  $C_{t', t''}$  ihn nicht enthält. Beides zusammengenommen lehrt, daß sich in der Grenze  $C_{t', t''}^1$  zu dem durch  $-1$  punktierten E. K. erweitert.

Nun gehen wir zur Funktion  $\varphi_2$  über: Hier tritt an Stelle von  $C_{t', t''}^1$  ein Bogen  $C_{t', t''}^2$ , der offenbar als Ganzes gegen den Punkt  $-\frac{1}{\lambda(t)}$  konvergiert. Daraus ergibt sich, genau so wie bei der obigen Betrachtung der Funktion  $h(z, t', t'')$ , daß  $\varphi_2$  im Innern des E. K. gleichmäßig gegen  $-\frac{1}{\lambda(t)}$  konvergiert. (Hier können wir nicht schließen, daß die Konvergenz im abgeschlossenen E. K. gleichmäßig stattfindet, da  $\varphi_1$  nicht schlicht abbilden muß.) Hieraus ergibt sich aber leicht der Wert des Differentialquotienten  $\frac{\partial f(z, t)}{\partial t}$ , denn bei jedem der oben bezeichneten Grenzübergänge haben wir

$$\varphi_2 \rightarrow -\frac{1}{\lambda(t)}, \quad \varphi_1 \rightarrow -\frac{z}{\lambda(t)}$$

und somit

$$\frac{\varphi_2 - 1}{\varphi_2 + 1} = \frac{(1 + e^{t' - t''}) \left( \frac{h}{z} - 1 \right)}{(1 - e^{t' - t''}) \left( \frac{h}{z} + 1 \right)} \rightarrow -\frac{1 + \frac{z}{\lambda(t)}}{1 - \frac{z}{\lambda(t)}},$$

oder wegen

$$1 + e^{t' - t''} \rightarrow 2, \quad \frac{h}{z} + 1 \rightarrow 2, \quad \frac{1 - e^{t' - t''}}{t'' - t'} \rightarrow 1,$$

$$\frac{h(z, t', t'') - z}{t'' - t'} \rightarrow -z \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z} \left( \kappa(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \right),$$

was offenbar gleichbedeutend ist mit

$$(42) \quad \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)}.$$

Diese Gleichung sagt aber nichts anderes aus, als daß  $f(z, t)$  die allgemeine Lösung einer Gleichung von der Form (19) darstellt.

Wir haben also folgendes Resultat gewonnen: Zu jeder beschränkten Schlitzabbildung  $b(z) = \beta(z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \dots)$  gehört eine eindeutig bestimmte stetige Funktion  $\kappa(t)$  ( $0 \leq t \leq t_0 = \log \frac{1}{\beta}$ ) vom Betrag 1 von der Eigenschaft, daß die Lösung der Differentialgleichung (42) die der Anfangsbedingung  $f(z, 0) = z$  genügt, für  $t = t_0$  die Abbildung  $b(z)$  liefert.

Es sei hier noch bemerkt, daß dieser Satz nicht umgekehrt werden kann, d. h. es gibt stetige Funktionen  $\kappa(t)$ , wo die Lösung von (42) keine Schlitzabbildungen liefert. Es ist mir jedoch nicht bekannt, welche Bereiche außer den Schlitzbereichen auf diese Art noch entstehen können. (Daß sie *schlicht* sein müssen, folgt aus den Betrachtungen, die sich an Gl. (17) anschließen.) Da man aber schon mit Schlitzabbildungen allgemeine Abbildungen approximieren kann, wie am Schluß des § 1 gezeigt wurde, ist dies für unsere Zwecke ohne Bedeutung.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß man auch mit abteilungsweise stetigen Funktionen  $\kappa(t)$  operieren kann. Nur muß man dann bei Auflösung der Differentialgleichung (42) noch die Forderung der *Stetigkeit* von  $f(z, t)$  hinzufügen. Die so gewonnenen Abbildungen können offenbar dadurch entstanden gedacht werden, daß man die durch stetige  $\kappa(t)$  erzeugten in endlicher Anzahl zusammensetzt.

## 6. Koeffizientenabschätzungen bei Potenzreihen, die den E. K. schlicht abbilden<sup>a)</sup>.

Das Resultat des vorigen Paragraphen zeigt, daß man sich bei der Untersuchung der Koeffizienten von schlicht abbildenden Potenzreihen auf die Betrachtung der Lösungen von Gleichungen des Typus (42) beschränken kann ( $\kappa(t)$  abteilungsweise stetig).

Für die Rechnung erweist es sich zuerst als zweckmäßig, in Gleichung (42) statt  $f(z, t)$  die Funktion  $g(z, t)$  einzuführen. Man erhält für diese die Gleichung

$$(43) \quad \frac{\partial g(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial g(z, t)}{\partial z} z \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z}$$

mit der Anfangsbedingung

$$(44) \quad g(z, t^0) = z.$$

<sup>a)</sup> Vgl. zu diesem Paragraphen die in <sup>1)</sup> zit. Arbeit v. L. Bieberbach.

Setzt man die Potenzreihenentwicklung (26) von  $g(z, t)$  in (43) ein, so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten von gleich hohen Potenzen von  $z$  das Gleichungssystem:

$$(45) \quad c_n'(t) = n c_n(t) + 2 \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu+1) c_\mu(t) x^{n-\mu}(t) \quad (c_0(t) = 1)$$

und die Anfangsbedingungen

$$(46) \quad c_n(t_0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Hieraus ergibt sich sofort die Rekursionsformel

$$(47) \quad c_n(t) = -2 e^{nt} \int_{t_0}^t e^{-n\tau} \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu+1) c_\mu(\tau) x^{n-\mu}(\tau) \cdot d\tau,$$

durch deren wiederholte Anwendung man zu folgenden Ausdrücken für die  $c_n(t)$  gelangt:

$$(48) \quad c_n(t) = e^{nt} \sum (-1)^k c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \int \dots \int e^{-\sum_{r=1}^k \alpha_r \tau_r} \prod_{r=1}^k x^{\alpha_r}(\tau_r) \cdot d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k.$$

Darin ist

$$(49) \quad c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = 2^k (n+1-\alpha_1)(n+1-\alpha_1-\alpha_2) \dots (n+1-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_k),$$

und die Summe ist über alle geordneten Systeme von positiven ganzen Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  ( $k \leq n$ ) zu erstrecken, die zur Summe  $n$  ergeben. Das mit  $c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$  multiplizierte Integral ist über den Bereich:  $t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k \leq t_0$  zu erstrecken. Setzt man insbesondere in der Formel  $t=0$  und schreibt hierauf statt  $t_0$  wieder  $t$ , so erhält man für die Koeffizienten  $b_n(t)$  der Potenzreihenentwicklung von  $f(z, t)$  die Ausdrücke

$$(50) \quad b_n(t) = \sum (-1)^k c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \int \dots \int e^{-\sum_{r=1}^k \alpha_r \tau_r} \prod_{r=1}^k x^{\alpha_r}(\tau_r) \cdot d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k.$$

Hier sind die Integrale über die Bereiche:  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k \leq t$  zu erstrecken.

Wir gehen jetzt dazu über, an Beispielen zu zeigen, wie man die Formeln (48) bzw. (50) benutzen kann, um Koeffizientenabschätzungen herzuleiten.

Wir stellen uns zuerst die Aufgabe, die Ungleichungen herzuleiten, welche zwischen den Koeffizienten  $\beta$  und  $b_1$  einer beschränkten Abbildung  $b(z)$  bestehen müssen. Gleichung (48) bzw. (50) ergibt

$$(51) \quad b_1(t_0) = c_1(0) = -2 \int_0^{t_0} x(\tau) e^{-\tau} d\tau$$

und somit ist

$$|b_1(t_0)| \leq 2 \int_0^{t_0} e^{-\tau} d\tau = 2(1 - \beta(t_0)).$$

(Das Gleichheitszeichen im Falle eines konstanten  $\kappa(t)$ .) Wir haben also den bereits von G. Pick<sup>9)</sup> bewiesenen Satz: *Bildet  $b(z)$  den E. K. schlicht ab auf einen Bereich im E. K., so ist*

$$|b_1| \leq 2(1 - \beta).$$

*Das Gleichheitszeichen tritt nur bei den Funktionen ein, die durch eine Gleichung von der Form*

$$(53) \quad \frac{b(z)}{(1 + \varepsilon b(z))^2} = \beta \frac{z}{(1 + \varepsilon z)^2} \quad (|\varepsilon| = 1, |z| < 1, |b| < 1)$$

*definiert sind. (Schlitzbereiche mit einem geraden zum Nullpunkt weisenden Schlitz.)*

Die Einzigkeit der Funktionen (53), die noch bewiesen werden muß, ergibt sich folgendermaßen: Es sei für eine Schlitzabbildung

$$|b_1(t_0) + 2\varepsilon(1 - e^{-t_0})| \leq \delta \quad (|\varepsilon| = 1, \delta > 0),$$

also

$$(54) \quad \left| \int_0^{t_0} (\varepsilon - \kappa(\tau)) e^{-\tau} d\tau \right| = \left| \int_0^{t_0} \left(1 - \frac{\kappa(\tau)}{\varepsilon}\right) e^{-\tau} d\tau \right| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Setzen wir  $\frac{\kappa(\tau)}{\varepsilon} = e^{i\vartheta(\tau)}$ , so ist also auch

$$\Re \left\{ \int_t^{t_0} \left(1 - \frac{\kappa(\tau)}{\varepsilon}\right) e^{-\tau} d\tau \right\} = 2 \int_t^{t_0} \sin^2 \frac{\vartheta(\tau)}{2} e^{-\tau} d\tau \leq \frac{\delta}{2} \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

und somit auf Grund der Cauchyschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} |\varepsilon - \kappa(\tau)| e^{-\tau} d\tau &= 2 \int_t^{t_0} \left| \sin \frac{\vartheta(\tau)}{2} \right| e^{-\tau} d\tau \leq 2 \sqrt{\int_t^{t_0} \sin^2 \frac{\vartheta(\tau)}{2} e^{-\tau} d\tau \cdot \int_t^{t_0} e^{-\tau} d\tau} \\ &\leq \sqrt{\delta(e^{-t} - e^{-t_0})}. \end{aligned}$$

Allgemein ist für zwei positive ganze Zahlen  $m, n$

$$(55) \quad \begin{aligned} \left| \int_t^{t_0} (\varepsilon^n - \kappa^n(\tau)) e^{-m\tau} d\tau \right| &\leq \int_t^{t_0} |\varepsilon - \kappa(\tau)| |\varepsilon^{n-1} + \dots + \kappa^{n-1}(\tau)| e^{-\tau} d\tau \\ &\leq n \int_t^{t_0} |\varepsilon - \kappa(\tau)| e^{-\tau} d\tau \leq n \sqrt{\delta(e^{-t} - e^{-t_0})}. \end{aligned}$$

Konvergiert also eine Folge von Schlitzabbildungen mit einem festen Anfangskoeffizienten  $\beta = e^{-t_0}$  *gleichmäßig* gegen eine Abbildung, für die  $b_1 = -2\varepsilon(1 - \beta)$  (wir wissen, daß eine solche Folge sicher existiert), so müssen, wie die Rekursionsformeln (47) zusammen mit der Abschätzung (55)

<sup>9)</sup> Pick, G.: Wien. Ber. 126, Abtlg. IIa (1917), S. 247–263.

lehren, auch die höheren Koeffizienten gegen die entsprechenden Koeffizienten der Abbildung (53) konvergieren, womit der Beweis erbracht ist.

Da mit  $b(z)$  auch  $\frac{b(az)}{a} = \beta(z + \varepsilon b_1 z^2 + \dots)$  ( $|\varepsilon| = 1$ ) eine beschränkte schlichte Abbildung liefert, so stellt (52) die *einzige* Beziehung dar, die zwischen  $\beta$  und  $b_1$  besteht.

Läßt man in (52)  $\beta$  unbestimmt und beachtet außerdem, daß man mit beschränkten Abbildungen alle schlichten Abbildungen des E.K. approximieren kann, so erhält man die von L. Bieberbach<sup>10)</sup> herrührende Ungleichung

$$(56) \quad |b_1| \leq 2$$

für alle schlichten Abbildungen (1). Ähnlich wie oben, beweist man leicht, daß das Gleichheitszeichen hier nur bei den Funktionen  $\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$  eintreten kann.

Wir gehen jetzt dazu über, eine Schranke für den zweiten Koeffizienten  $b_2$  herzuleiten. Aus (50) ergibt sich nach einer leichten Umformung

$$(57) \quad b_2(t_0) = c_2(0) = 4 \left( \int_0^{t_0} x(\tau) e^{-\tau} d\tau \right)^2 - 2 \int_0^{t_0} x^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau.$$

Da nun bei Ersetzung von  $b(z)$  durch  $\frac{b(az)}{a}$  an Stelle von  $b_2$   $\varepsilon^2 b_2$  tritt, so fällt das Maximum von  $|b_2|$  bei gegebenem  $\beta$  mit dem Maximum des reellen Teiles von  $b_2$  zusammen und man kann sich auf die Abschätzung des letzteren beschränken. Setzt man  $x(t) = e^{i\vartheta(t)}$ , so ergibt sich

$$(58) \quad \Re(b_2(t_0)) = 4 \left\{ \left( \int_0^{t_0} \cos \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau \right)^2 - \left( \int_0^{t_0} \sin \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau \right)^2 - \int_0^{t_0} \cos^2 \vartheta(\tau) e^{-2\tau} d\tau \right\} + 1 - e^{-2t_0}.$$

Nun ist nach der Cauchyschen Ungleichung

$$\left( \int_0^{t_0} \cos \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau \right)^2 \leq \int_0^{t_0} \cos^2 \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau \cdot \int_0^{t_0} e^{-\tau} d\tau \leq \int_0^{t_0} \cos^2 \vartheta(\tau) e^{-\tau} d\tau,$$

und somit

$$(59) \quad \Re(b_2(t_0)) < 4 \int_0^{t_0} \cos^2 \vartheta(\tau) (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) d\tau + 1 - e^{-2t_0}.$$

Beachtet man endlich, daß der Klammerausdruck in (59) positiv ist und  $\cos^2 \vartheta(\tau) \leq 1$ , so erhält man endlich

$$\Re(b_2(t_0)) < 3 - 4\beta(t_0) + \beta^2(t_0).$$

Es gilt somit für alle beschränkten schlichten Abbildungen die Ungleichung

$$(60) \quad |b_2| < 3 - 4\beta + \beta^2.$$

<sup>10)</sup> Vgl. die in <sup>1)</sup> zit. Arbeit.

Daraus ergibt sich weiter, wie oben,

$$(61) \quad |b_2| \leq 3$$

für alle schlichten Abbildungen (1). Auch hier erkennt man leicht, daß das Gleichheitszeichen in (61) nur bei den Funktionen  $\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$  eintritt. (Die Ungleichung (60) dagegen ist nicht scharf.)

Scharfe Schranken für die höheren Koeffizienten abzuleiten, ist mir nicht gelungen. Dagegen gelingt es leicht, für die Koeffizienten der Umkehrreihe von (1) die scharfen Schranken zu bestimmen. Führt man nämlich in Gleichung (42) statt  $w = f(z, t)$  die Umkehrfunktion  $z = \varphi(w, t) = e^t(w + \omega_1(t)w^2 + \omega_2(t)w^3 + \dots)$  ein, so erhält man für dieselbe die Differentialgleichung

$$(62) \quad \frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial w} w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w} \quad (11)$$

mit der Anfangsbedingung  $\varphi(w, 0) = w$  und hieraus für die Koeffizienten von  $\varphi(w, t)$

$$(63) \quad \omega_n(t) = e^{nt} \sum c_{a_1 a_2 \dots a_k} \int \dots \int e^{-\sum_{v=1}^k a_v \tau_v} \prod_{v=1}^k \kappa^{a_v}(\tau_v) \cdot d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k.$$

Hier sind die Integrale zu erstrecken über:  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k \leq t$ . Aus Gleichung (63) ersieht man, daß die Maximalwerte der Koeffizienten der Umkehrreihe von (3) bei gegebenem  $\beta$  alle von den Funktionen (53) und nur von diesen, übernommen werden.

Läßt man wieder  $\beta$  unbestimmt, so ergibt sich hieraus für die Koeffizienten der Umkehrreihe  $w + \omega_1 w^2 + \omega_2 w^3 + \dots$  einer schlicht abbildenden Potenzreihe (1) allgemein

$$(64) \quad |\omega_n| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+2)} \cdot 2^{n+1}.$$

Die Schranken werden wieder von den Funktionen  $\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}$  und nur von diesen erreicht.

<sup>11)</sup> Sie stimmt natürlich mit (43) überein; denn  $\varphi(w, t) = \text{Const.}$  gibt ebenso wie  $g(w, t) = \text{Const.}$  die allgemeine Lösung von (19).

# Über die Gewinnung summierbarer Polynomreihen aus summierbaren Fourierreihen.

Von

Kyryll Popoff in Sofia.

Wir gebrauchen folgende Bezeichnungen:

Eine beliebige Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

ist summierbar  $r$ -ter Ordnung im Cesàroschen Sinne oder kürzer  $(C, r)$ , wenn die Grenze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{i=0}^n A_{n-i}^{(r)} u_i$$

existiert. Hier ist

$$A_n^{(r)} = \frac{(r+n)(r+n-1)\dots(r+1)}{n!}.$$

Sei

$$v_0(x), v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), \dots$$

ein System von stetigen Funktionen, die die Bedingungen

$$\int_a^b v_m(x) v_n(x) dx = 0, \quad \int_a^b v_n^2(x) dx = 1, \quad m \neq n$$

erfüllen. Sei außerdem

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$$

eine andere Folge von stetigen Funktionen von der Art, daß die Summe

$$K(x, y; n) = -\frac{1}{A_n^{(r)}} \cdot \sum_{i=1}^n A_{n-i}^{(r)} \theta_i(x) v_i(y),$$

wo

$$\theta_i(x) = \psi_i(x) - v_i(x),$$

gleichmäßig nach einem stetigen Kern  $K(x, y)$  konvergiert, der Eins nicht als Eigenwert zuläßt.



Satz I. Wenn die Funktionen  $v_n(x)$  so beschaffen sind, daß die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i(x) \int_a^b F(x) v_i(x) dx,$$

welche einer im Riemannschen oder im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion  $F(x)$  entspricht, summierbar  $(C, r)$  mit der Summe  $F(x) = \frac{1}{2} [F(x+0) + F(x-0)]$  ist in jedem Punkte  $x$ , wo die Grenze  $F(x+0) + F(x-0)$  existiert, und wenn in jedem Intervalle von  $x$ , wo  $F(x)$  stetig ist, die Summe

$$\frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{i=0}^n A_{n-i}^{(r)} v_i(x) \int_a^b F(t) v_i(t) dt$$

gleichmäßig nach  $F(x)$  konvergiert (wenn  $n$  ins Unendliche wächst), dann gibt es eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(x),$$

welche summierbar  $(C, r)$  mit der Summe  $F(x) = \frac{1}{2} [F(x+0) + F(x-0)]$  ist in jedem Punkte, wo diese Grenze existiert; in jedem Intervalle von  $x$ , wo die Funktion  $F(x)$  stetig ist, konvergiert die zugehörige  $n$ -te Cesàro-sche Summe gleichmäßig nach  $F(x)$ .

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir die Integralgleichung

$$F(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t) f(t) dt.$$

Die Lösung

$$f(x) = F(x) + \int_a^b N(x, t; 1) F(t) dt$$

dieser Gleichung, wo  $N(x, t; 1)$  der lösende Kern von  $K(x, t)$  für den Parameterwert Eins ist, zeigt dieselben Singularitäten wie die Funktion  $F(x)$  selbst.

Setzen wir jetzt

$$C_n = \int_a^b f(t) v_n(t) dt,$$

und bilden wir die  $n$ -te Cesàro-sche Summe  $s_n^{(r)}$  der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(x),$$

so bekommt man

$$s_n^{(r)} = \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{i=1}^n A_{n-i}^{(r)} \psi_i(x) \int_a^b f(t) v_i(t) dt.$$

Ersetzt man in dieser Summe  $\psi_i(x)$  durch  $\theta_i(x) + v_i(x)$ , so folgt

$$s_n^{(r)} = - \int_a^b K(x, t; n) f(t) dt + \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{i=0}^n A_{n-i}^{(r)} v_i(x) \int_a^b f(t) v_i(t) dt.$$

Da nach unserer Voraussetzung die Summe auf der rechten Seite dieses Ausdrucks nach  $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$  und das erste Integral nach

$$\int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

konvergiert, wenn  $n$  ins Unendliche wächst, so ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(r)} = - \int_a^b K(x, t) f(t) dt + f(x) = F(x).$$

In jedem Intervalle von  $x$ , wo  $F(x)$  stetig ist, haben wir eine gleichmäßige Konvergenz, da in diesem Falle die Summe auf der rechten Seite von  $s_n^{(r)}$  gleichmäßig nach  $f(x)$  konvergiert,  $K(x, t)$  stetig ist und  $f(x)$  dieselben Singularitäten wie  $F(x)$  zeigt, w. z. b. w.

Da jede stetige Funktion beliebig durch Polynome approximiert werden kann, so lassen sich immer für  $\psi_i(x)$  Polynome wählen, die die Funktionen  $v_i(x)$  approximieren. In diesem Falle bleibt noch zu zeigen, daß diese Wahl so getroffen werden kann, daß der Kern Eins nicht als Eigenwert zuläßt.

Es genügt zu diesem Zwecke z. B. die Approximation durch die Polynome  $\psi_i(x)$  so weit zu führen, daß  $|\theta_i(x)| = |v_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon_i$ , wo  $\varepsilon_i$  positive Zahlen sind, die der Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^2 \left( \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{i=1}^n A_{n-i}^{(r)} \varepsilon_i \right)^2 (b-a)^2 < 1$$

genügen wo  $M$  den größten absoluten Wert von  $v_i(x)$  bedeutet.

In diesem Falle hat man

$$\int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2 dx dy < \lim_{n \rightarrow \infty} M^2 \left( \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{i=1}^n A_{n-i}^{(r)} \varepsilon_i \right)^2 (b-a)^2 < 1,$$

und folglich wird nach einem gut bekannten Satze von Herrn E. Schmidt<sup>1)</sup> der Kern  $K(x, y)$  nicht Eins als Eigenwert zulassen.

Herr Chapman hat gezeigt<sup>2)</sup>, daß die Fouriersche Reihe jeder absolut

<sup>1)</sup> Erhard Schmidt: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung. Math. Ann. 64 (1907), S. 162.

<sup>2)</sup> S. Chapman: Proceeding of the London Math. Society (2) 9 (1910), S. 390—391; Quarterly Journal Nr. 160 (1911), S. 33; Leopold Fejér: Math. Ann. 58 (1904); Comptes rendus 131 (1900), 134 (1902).

integrierbaren Funktion  $F(x)$  summierbar  $(C, r)$  für  $r > 0$  ist, daß die Summe gleich  $\frac{1}{2}[F(x+0) + F(x-0)]$  ist in jedem Punkte  $x$ , wo diese Grenze existiert, und daß in jedem Intervalle, wo  $F(x)$  stetig ist, die  $n$ -ten Cesàroschen Summen mit  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig nach  $F(x)$  konvergieren.

Aus diesem Satze von Herrn Chapman und aus dem Satze I geht unmittelbar hervor der

Satz II. *Es gibt Systeme von Polynomen*

$$P_n(x) = 1 - \frac{(nx)^2}{2!} + \frac{(nx)^4}{4!} - \dots + \frac{(nx)^{2p_n}}{(2p_n)!}$$

$$Q_n(x) = \frac{(nx)^1}{1!} - \frac{(nx)^3}{3!} + \dots \pm \frac{(nx)^{2q_n+1}}{(2q_n+1)!},$$

welche die Eigenschaft besitzen, daß jeder absolut integrierbaren Funktion  $F(x)$  eine Reihe

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) + \dots \\ + b_1 Q_1(x) + \dots + b_n Q_n(x) + \dots \end{aligned}$$

entspricht, die summierbar  $(C, r > 0)$  ist mit der Summe

$$\frac{1}{2}[F(x+0) + F(x-0)]$$

in jedem Punkte, wo diese Grenze existiert. In jedem Intervalle von  $x$ , wo  $F(x)$  stetig ist, konvergieren die Cesàroschen Summen gleichmäßig nach  $F(x)$ .

Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  sind die Fourierschen Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

der Lösung  $f(x)$  einer Fredholmischen Gleichung<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Vgl. K. Popoff: Comptes rendus 173 (1921); Math. Zeitschr. (im Druck), wo die Summierbarkeit in gewöhnlichem Sinne von diesen Reihen betrachtet ist, und auch Leopold Fejér: Math. Ann. 67 (1909); Comptes rendus 146 (1908). — A. Haar: Math. Ann. 60 (1910), Rendiconti di Palermo 32 (1911). — S. Chapman: Quarterly Journal Nr. 169 (1911); Math. Ann. 72 (1912). — T. W. Gronwall: Math. Ann. 74 (1913), 75 (1914).

# Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Popoff „Über die Gewinnung summierbarer Potenzreihen aus summierbaren Fourier-Reihen“<sup>1)</sup>.

Von

Otto Blumenthal in Aachen.

Die anregende Note Herrn Popoffs gibt mir Anlaß zu der Bemerkung, daß sich ihre allgemeinen Resultate, nämlich der Satz I, bei geringer Abänderung der Voraussetzungen höchst einfach aus Hilberts Theorie der unendlichvielen linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten herleiten lassen. Es ist ein gutes Beispiel einer Fragestellung, wo diese Methode sich unmittelbarer darbietet als die der Integralgleichungen. Die Abänderung der Voraussetzungen besteht darin, daß ich von der zu entwickelnden Funktion quadratische Integrabilität voraussetze.

Ich benutze Herrn Popoffs Bezeichnungen, nur für den Summationsprozeß möchte ich eine allgemeinere Formulierung einführen, weil die Ergebnisse (ebenso wie diejenigen Herrn Popoffs) ja nicht auf Cesàrosche Summabilität beschränkt sind, sondern für jeden Summationsprozeß gelten, der nur die eine Forderung erfüllt, jede konvergente Reihe mit der Summe  $F$  zu der gleichen Summe zu summieren. Ich schreibe allgemein

$$(1) \quad F(x) \sim \sum c_n \psi_n(x),$$

um anzudeuten, daß die Reihe auf der rechten Seite durch den Summationsprozeß  $(C)$  zur Summe  $F(x)$  summierbar ist, und bezeichne die durch den Prozeß aus den  $c_n$  entstehenden Koeffizienten des  $p$ -ten Summationspolynoms mit entsprechenden griechischen Buchstaben,  $\gamma_k^{(p)}$ , so daß also (1) eine Abkürzung ist für

$$(1') \quad F(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\gamma_1^{(p)} \psi_1(x) + \dots + \gamma_p^{(p)} \psi_p(x)).$$

Der Satz I des Herrn Popoff mit meiner Abänderung besagt dann:

<sup>1)</sup> Math. Ann. 89, S. 122–125.

Ist  $v_1, v_2, \dots$  ein orthogonales, normiertes Funktionensystem der Art, daß jede im Intervall (01) quadratisch integrierbare Funktion sich in der Form

$$(2) \quad F(x) \sim \sum a_n v_n(x), \quad a_n = \int_0^1 F(\xi) v_n(\xi) d\xi$$

entwickeln läßt, d. h. daß

$$(2') \quad F(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\alpha_1^{(p)} v_1(x) + \dots + \alpha_p^{(p)} v_p(x)),$$

dann besteht für  $F(x)$  auch Entwickelbarkeit nach allen genügend scharfen Näherungspolynomen

$$(3) \quad \psi_n(x) = v_n(x) + \theta_n(x)$$

der  $v_n$ , d. h. es gelten für diese  $\psi_n$  auch die Entwicklungen (1) oder (1'). Die Bedingung für genügende Schärfe der Näherung ist die gleiche wie bei Herrn Popoff.

Zum Beweise setze man (3) in (1) ein. Man erhält

$$(4) \quad F(x) - \sum c_n \theta_n(x) \sim \sum c_n v_n(x),$$

eine Formel, die besagt, daß die  $c_n$  Fourierkoeffizienten nach den  $v_n$  der auf der linken Seite stehenden Funktion sind, vorausgesetzt, daß die  $\sum c_n \theta_n(x)$  existiert. Umgekehrt zeigt man: Lassen sich Koeffizienten  $c_n$  so bestimmen, daß (4) formal erfüllt ist und außerdem

$$(5) \quad \sum c_n \theta_n(x) \text{ im Intervall (01) gleichmäßig konvergiert,}$$

dann gilt die summierbare Entwicklung (1) nach den  $\psi_n(x)$ .

In der Tat ist

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(p)} \psi_1(x) + \dots + \gamma_p^{(p)} \psi_p(x) &= [\gamma_1^{(p)} v_1(x) + \dots + \gamma_p^{(p)} v_p(x)] \\ &\quad - [\gamma_1^{(p)} \theta_1(x) + \dots + \gamma_p^{(p)} \theta_p(x)]. \end{aligned}$$

Es ist aber wegen (5)  $F(x) - \sum c_n \theta_n(x)$  im Intervall quadratisch integrierbar, daher wegen (4)

$$\gamma_1^{(p)} v_1(x) + \dots + \gamma_p^{(p)} v_p(x) = F(x) - \sum c_n \theta_n(x) + \varepsilon_p(x), \quad ^2)$$

ferner wegen der Konvergenz von  $\sum c_n \theta_n(x)$  nach der vorausgesetzten Eigenschaft des Summationsprozesses

$$\gamma_1^{(p)} \theta_1(x) + \dots + \gamma_p^{(p)} \theta_p(x) = \sum c_n \theta_n(x) + \eta_p(x),$$

daher im ganzen

$$\gamma_1^{(p)} \psi_1(x) + \dots + \gamma_p^{(p)} \psi_p(x) = F(x) + \varepsilon_p(x) + \eta_p(x),$$

wo  $\varepsilon_p(x)$  und  $\eta_p(x)$  mit wachsendem  $p$  verschwinden. W. z. b. w.

<sup>2)</sup> An Sprungstellen tritt an Stelle von  $F(x)$  ein Mittelwert aus  $F(x-0)$  und  $F(x+0)$ .

Man setze jetzt die Näherung der  $v_n$  durch die  $\psi_n$  so scharf voraus, daß

$$(6) \quad \Sigma \theta_n^2(x) \text{ im Intervall } (01) \text{ gleichmäßig konvergiert.}$$

Dann läßt sich Hilberts Theorie der unendlichvielen Variablen unmittelbar auf die Beziehung (4) anwenden. Denn sie lautet ausgeschrieben:

$$(4') \quad c_m = \int_0^1 F(x) v_m(x) dx - \Sigma c_n \int_0^1 \theta_n(x) v_m(x) dx \\ = a_m + \Sigma k_{mn} c_n,$$

oder

$$(7) \quad c_m - \Sigma k_{mn} c_n = a_m.$$

Die Koeffizienten  $k_{mn}$  haben die Eigenschaft, daß  $\Sigma_m \Sigma_n k_{mn}^2$  konvergiert. In der Tat ist

$$\Sigma_m k_{mn}^2 = \Sigma_m \left[ \int_0^1 \theta_n(x) v_m(x) dx \right]^2 = \int_0^1 \theta_n^2(x) dx,$$

und

$$\Sigma_n \Sigma_m k_{mn}^2 = \Sigma_n \int_0^1 \theta_n^2(x) dx = \int_0^1 \Sigma \theta_n^2(x) dx$$

ist nach (6) endlich. Daher ist nach Hilbert<sup>3)</sup> die Bilinearform  $\Sigma \Sigma k_{mn} y_m z_n$  „vollständig“, und das Gleichungssystem (7) hat entweder für alle  $a_m$  mit konvergenter Quadratsumme ein Lösungssystem  $c_n$  mit konvergenter Quadratsumme, oder das homogene Gleichungssystem ist lösbar.

Die letzte Möglichkeit ist ausgeschlossen, wenn die  $\theta_n$  außer (6) noch die verschärfte Bedingung

$$(8) \quad \Sigma \theta_n^2(x) < 1$$

in (01) befriedigen. Angenommen nämlich, das homogene Gleichungssystem habe eine von Null verschiedene Lösung, so kann man ihr die Quadratsumme 1 zuschreiben. Dann ist  $\Sigma c_n \theta_n(x)$  gleichmäßig konvergent, nämlich dem Betrage nach  $< \sqrt{\Sigma c_n^2 \Sigma \theta_n^2} = \sqrt{\Sigma \theta_n^2} < 1$ , und daher folgt aus (4') bei  $F(x) = 0$

$$c_m = - \int_0^1 (\Sigma c_n \theta_n(x)) v_m(x) dx$$

und daraus

$$\int_0^1 (\Sigma c_n \theta_n(x))^2 dx = \Sigma c_m^2 = 1.$$

Demnach müßte es Punkte geben, in denen  $|\Sigma c_n \theta_n(x)| > 1$  ist, gegen das eben Bewiesene.

<sup>3)</sup> Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Leipzig, Teubner 1912), Satz 36 (S. 150) und Satz 40 (S. 165).

Also haben die Gleichungen (4') für alle  $a_m$  mit konvergenter Quadratsumme ein Lösungssystem  $c_n$  mit konvergenter Quadratsumme. Die Bedingung für die  $a_m$  ist erfüllt, weil  $F(x)$  quadratisch integrabel ist. Wegen (6) konvergiert  $\sum c_n \theta_n(x)$  im ganzen Intervall gleichmäßig. Daher löst das gefundene System  $c_n$  unsere Aufgabe.

Um schließlich in möglichst einfacher Form den Anschluß an die Methode Herrn Popoffs zu gewinnen, setzen wir noch voraus, daß  $\sum v_n(x) \theta_n(y)$  für alle Wertepaare  $x, y$  des Intervalles gleichmäßig konvergiere. Dann können wir das System (7) auch zu einer Integralgleichung zusammenfassen. Setzen wir nämlich

$$F(x) - \sum c_n \theta_n(x) = f(x)$$

und

$$-\sum v_n(x) \theta_n(y) = K(x, y),$$

so ergibt sich, indem man die Gleichungen (7) mit  $\theta_m(y)$  multipliziert und addiert,

$$\sum_m c_m \theta_m(y) + \int_0^1 \sum_m \theta_m(y) v_m(x) \sum_n c_n \theta_n(x) dx = \sum_m a_m \theta_m(y).$$

Aber

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_m \theta_m(y) v_m(x) \sum_n c_n \theta_n(x) dx &= \int_0^1 f(x) K(x, y) dx + \sum_m \theta_m(y) \int_0^1 v_m(x) F(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) K(x, y) dx + \sum a_m \theta_m(y). \end{aligned}$$

Daher

$$f(y) - \int_0^1 f(x) K(x, y) dx = F(y).$$

Dies ist die Integralgleichung Herrn Popoffs.

(Eingegangen am 22. 8. 1922.)

## Oszillationstheoreme oberhalb der Stieltjesschen Grenze.

Von

O. Haupt in Erlangen und E. Hilb in Würzburg.

Gegenstand der Betrachtung sind die Differentialgleichungen der Form

$$(F) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{x-1} + \mathfrak{P}(x) \right) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x(x-1)} (\lambda \mathfrak{R}(x) + \mathfrak{Q}(x)) y = 0.$$

Dabei bedeuten  $\alpha$  und  $\beta$  reelle, positive, nicht ganzzahlige Konstanten. Die Funktionen  $\mathfrak{P}(x)$ ,  $\mathfrak{R}(x)$  und  $\mathfrak{Q}(x)$  von  $x$  sind regulär-analytisch in einem Gebiete  $\Gamma$  der komplexen  $x$ -Ebene, welches das Intervall  $[0, 1]^1$  der reellen  $x$ -Achse ganz im Innern enthält.  $\mathfrak{P}(x)$ ,  $\mathfrak{R}(x)$  und  $\mathfrak{Q}(x)$  sind reellwertig für reelle Werte von  $x$ ; überdies soll  $\mathfrak{R}(x) \neq 0$  sein in  $\Gamma$ . Schließlich bedeutet  $\lambda$  einen Parameter<sup>2</sup>).

Die singulären Stellen  $x=0$ ,  $x=1$  sind Stellen der Bestimmtheit. (F) besitzt — von ganzzahligen Werten  $\alpha, \beta$  wird ja abgesehen — je eine Lösung, welche in  $x=0$  (bzw. in  $x=1$ ) zum Exponenten 0 oder  $\alpha$  (bzw. 0 oder  $\beta$ ) gehört. Durch Verfügung über den noch willkürlichen, konstanten Faktor seien diese Lösungen in geeigneter Weise eindeutig festgelegt („normiert“) und der Reihe nach bezeichnet mit  $y_0(x; 0)$  oder  $y_\alpha(x; 0)$  (bzw.  $y_0(x; 1)$  oder  $y_\beta(x; 1)$ ).

Die zu behandelnde *Randwertaufgabe* verlangt die Bestimmung derjenigen *ausgezeichneten Werte des Parameters*  $\lambda$ , der „*Eigenwerte*“ des Problems, für welche die Bedingung („*Randbedingung*“) erfüllt ist

$$(R) \quad c_0 [y_0(x; 0) + A y_\alpha(x; 0)] \equiv c_1 [y_0(x; 1) + B y_\beta(x; 1)], \quad c_0 \neq 0, c_1 \neq 0.$$

Hier sind  $A$  und  $B$  reelle, im übrigen beliebig vorgegebene Konstanten;

(R) gelte für einen, die Punkte  $x=0$  und  $x=1$  nicht enthaltenden Teil-

<sup>1</sup>) Im folgenden wird mit  $(0, 1)$  bzw.  $[0, 1]$  das offene bzw. das abgeschlossene Intervall  $0 < x < 1$  bzw.  $0 \leq x \leq 1$  bezeichnet.

<sup>2</sup>) Die bezüglich (F) zu gewinnenden Ergebnisse übertragen sich auf allgemeinere Differentialgleichungen, bei welchen die Exponenten an den Bestimmtheitsstellen  $x=0$  und  $x=1$  beliebige Werte haben.



bereich von  $\Gamma$ . M. a. W.: Es soll die zum Eigenwerte  $\lambda$  gehörige Lösung  $y_0(x; 0) + Ay_\alpha(x; 0)$  von (F) bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen mit der zum gleichen Werte  $\lambda$  gehörigen Lösung  $y_0(x; 1) + By_\beta(x; 1)$ . Die (reelle) Konstante  $\frac{c_0}{c_1} = c$  ist im allgemeinen noch abhängig von dem jeweils betrachteten Eigenwerte und durch diesen eindeutig mitbestimmt<sup>3)</sup>.

Falls  $\lambda$  ein Eigenwert ist, wird die (eindeutig bestimmte) Lösung  $y_0(x; 0) + Ay_\alpha(x; 0)$  als zum betrachteten Eigenwerte gehörige „Eigenfunktion“ bezeichnet.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, für die eben formulierte Randwertaufgabe das „Oszillationstheorem“ aufzustellen, also die einzelnen (reellen) Eigenfunktionen — und damit dann auch die reellen Eigenwerte — zu charakterisieren durch die Anzahl ihrer reellen Nullstellen im Intervalle  $(0, 1)$ .

Die Untersuchung ergibt folgendes: Ist  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ , liegen also  $\alpha$  und  $\beta$  unterhalb der Stieltjesschen Grenze<sup>4)</sup>, so gilt das „Normale Oszillationstheorem“: Alle Eigenwerte sind reell, liegen im Endlichen diskret und häufen sich nur im Unendlichen<sup>5)</sup>. Der Größe nach geordnet seien diese Eigenwerte  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ . Zu jedem  $\lambda_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) gehört eine und nur eine (für reelle  $x$  reellwertige) Eigenfunktion; diese besitzt genau  $k$  reelle Nullstellen, welche dem Intervalle  $(0, 1)$  angehören, oder, wie kurz gesagt wird: Der Eigenwert  $\lambda_k$  (und seine Eigenfunktion) gehört zur „Oszillationszahl“  $k$ .<sup>6)</sup>

Ist hingegen  $\alpha$  oder  $\beta$  oder sind beide größer als Eins, liegen sie also teilweise oder sämtlich oberhalb der Stieltjesschen Grenze, so erleidet dieses normale Oszillationstheorem Störungen; und zwar — kurz gesagt — in dem Sinne, daß eine endliche Anzahl von Eigenwertepaaren, die sogenannten „irregulären Paare“, ihrer Kennzeichnung durch die Nullstellenzahl der zugehörigen Eigenfunktionen verlustig gehen<sup>7)</sup>.

Unter einem „irregulären Paare“ verstehen wir dabei im engeren Sinne ein Paar von reellen verschiedenen Eigenwerten, deren zugehörige

<sup>3)</sup> Auf den Fall der Randbedingungen

$$c_0 y_\alpha(x; 0) = c_1 (B_1 y_0(x; 1) + B_2 y_\beta(x; 1))$$

gehen wir nicht ein; ebensowenig auf den Fall, daß der eine Endpunkt des Intervalles keine singuläre Stelle ist. Unsere Methode ist aber auch auf diese Fälle anwendbar.

<sup>4)</sup> Vgl. Böcher: Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Enzykl. math. Wiss. IIA 7a, S. 456.

<sup>5)</sup> Und zwar häufen sie sich nur gegen  $-\infty$ , nicht gegen  $+\infty$ , weil im Nenner der Koeffizienten der Differentialgleichung (F) bei unserer Schreibweise  $(x-1)$  auftritt und nicht  $(1-x)$ .

<sup>6)</sup> Vgl. Böcher, l. c.<sup>4)</sup>, Nr. 6.

<sup>7)</sup> Vgl. l. c.<sup>6)</sup> sowie die historischen Notizen im Texte weiter unten.

Oszillationszahlen übereinstimmen und welche durch keine weiteren (reellen) Eigenwerte voneinander auf der reellen  $\lambda$ -Achse getrennt sind. Im weiteren Sinne umfaßt der Begriff des irregulären Paares auch solche Paare von Eigenwerten, welche vermöge der später zu betrachtenden „Änderungen“ des Problems in irreguläre Paare im engeren Sinne übergeführt werden können oder für welche eine derartige Überführung wenigstens denkbar ist; insbesondere gehören, wie sich zeigen wird, hierher: zusammenfallende (aber doppelt zu zählende) Eigenwerte oder Paare zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte. *Zwei irreguläre Paare heißen „verschieden“, wenn sie entweder keinen Eigenwert gemeinsam haben oder aber vermöge zulässiger Änderungen des Problems in vier verschiedene Eigenwerte aufgelöst werden können.*

Auf die eigenartigen Verhältnisse, welche bei dem Oszillationstheorem jenseits der Stieltjeschen Grenze auftreten, hat F. Klein in seinen Vorlesungen [vgl. etwa die autographierten Vorlesungen (S. S. 1894) und Math. Annalen 46 (1895)], dann aber im persönlichen Verkehre immer wieder hingewiesen und schließlich\*) den Fall der hypergeometrischen Funktion explizite behandelt.

Dieser Spezialfall ist *typisch* und wird auch bei uns im Mittelpunkt stehen.

Unser Gedankengang ist hierbei folgender: Wir stellen zunächst für eine spezielle Differentialgleichung (nämlich für die hypergeometrische Differentialgleichung) und für spezielle Randbedingungen die Oszillationstheoreme auf. Sodann gehen wir zu allgemeineren Randwertaufgaben über, indem wir Differentialgleichung und Randbedingung so abändern, daß die Oszillationstheoreme jeweils erhalten bleiben. Es kommen mithin nur Änderungen in Betracht, bei denen einerseits Eigenwerte weder verloren noch gewonnen werden („Erhaltung der Eigenwerte“) und alle Eigenwerte reell bleiben mit Ausnahme der irregulären Paare; während anderseits die Oszillationszahlen ungeändert bleiben oder in leicht übersehbarer Weise sich verschieben.

Demgemäß wird zunächst (§ 1) der typische Spezialfall der Differentialgleichung

$$(H) \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \left( \frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{x-1} \right) \frac{d\eta}{dx} + \frac{1}{x(x-1)} \eta = 0$$

und der Randbedingung

$$(R_0) \quad c_0 \eta_0(x; 0) \equiv c_1 \eta_0(x; 1)$$

mittels Kontinuitätsbetrachtungen erledigt.

\*) Klein: Zum Oszillationstheorem jenseits der Stieltjeschen Grenze, Ges. Werke 2, S. 597–600.

Sodann wird (§ 2) nachgewiesen, daß die (in § 1) gewonnenen Theoreme sich unverändert auf den allgemeinen Fall des Problems, nämlich für (F) und (R), übertragen. Der Beweis, daß die Eigenwerte bei den zu verwendenden stetigen Änderungen erhalten bleiben, stützt sich auf die (in § 3 bewiesene) asymptotische Darstellung der Lösungen von (F) vermittelt Besselscher bzw. Exponentialfunktionen.

## § 1.

**Erledigung eines typischen Spezialfalles.**

Zuerst soll, wie bereits oben erwähnt, diejenige spezielle Aufgabe erledigt werden, welche sich auf die Differentialgleichung

$$(H) \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \left( \frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{x-1} \right) \frac{d\eta}{dx} + \frac{\lambda}{x(x-1)} \eta = 0 \quad (0 < \alpha, 0 < \beta),$$

und die Randbedingungen

$$(R_0) \quad c_1 \eta_0(x; 0) \equiv c_2 \eta_0(x; 1)$$

bezieht.

Die Randwertaufgabe fordert also, daß die Eigenfunktionen in beiden Intervallendpunkten zum Exponenten Null gehören sollen. Daraus folgt, daß die Eigenfunktionen Polynome sind<sup>9)</sup>; und zwar sind die Eigenwerte

$$\lambda_k = -k(k+1-\alpha-\beta) \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

und die zugehörigen (bereits geeignet normierten) Eigenfunktionen

$$\eta_0(x) \equiv 1,$$

$$\eta_k(x) = F(-k, k+1-\alpha-\beta, 1-\alpha; x) \cdot c_0^{(k)} = \sum_{v=0}^k c_v^{(k)} x^v, \quad k=1, 2, \dots^{10)}$$

Dabei gilt

$$c_0^{(k)} = (1-\alpha)(2-\alpha) \dots (k-\alpha)$$

$$c_v^{(k)} = \frac{(-1)^v}{v!} [k(k-1) \dots (k-v+1)]$$

$$[(k+1-\alpha-\beta)(k+1-\alpha-\beta+1) \dots (k+1-\alpha-\beta+v-1)]$$

$$(\nu+1-\alpha)(\nu+2-\alpha) \dots (k-\alpha) \quad (\nu=1, 2, \dots, k-1),$$

$$c_k^{(k)} = (-1)^k (k+1-\alpha-\beta)(k+1-\alpha-\beta+1) \dots (k+1-\alpha-\beta+k-1).$$

Durch die gewählte Normierung, wie sie in der Festlegung von  $c_0^{(k)}$  zum Ausdruck kommt, wird das Auftreten logarithmischer Glieder für den Fall ganzzahliger  $\alpha$  und  $\beta$  ausgeschlossen.

<sup>9)</sup> Vgl. l. c.<sup>4)</sup>, Nr. 5, S. 452.

<sup>10)</sup>  $F$  bezeichnet die hypergeometrische Reihe. Vgl. z. B. Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichungen der Physik 2 (Braunschweig 1912) S. 13. Die  $\alpha, \beta$  in Texten oben haben eine andere Bedeutung als die bei Riemann-Weber l. c.

Die Eigenwerte sind also, für beliebige  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , alle reell; sie häufen sich nur gegen  $-\infty$ , sie ändern sich stetig mit  $\alpha$  und  $\beta$  und bleiben sämtlich „erhalten“ bei Änderungen der  $\alpha$  und  $\beta$ . Die  $\lambda_k$  bilden für  $k \geq \frac{1}{2}(\alpha + \beta - 1)$  eine monoton absteigende, hingegen für  $0 \leq k < \frac{1}{2}(\alpha + \beta - 1)$  eine monoton aufsteigende Folge.

Auch die Eigenfunktionen ändern sich stetig mit  $\alpha$  und  $\beta$ , sie werden niemals identisch Null. Die Oszillationszahlen können sich nur dann ändern, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  ganzzahlige Werte passieren. Tatsächlich werden bei Änderung von  $\alpha$  und  $\beta$  reelle Nullstellen im Innern des Intervalles  $[0, 1]$  weder verloren noch gewonnen. Dies wäre ja nur möglich in der Weise, daß die jeweils betrachtete Eigenfunktion im Intervallinnern einmal eine zwei- oder mehrfache reelle Nullstelle besäße, daß also die Eigenfunktion sowohl als ihre Ableitung gleichzeitig verschwinden. Dann müßte aber die Eigenfunktion identisch Null sein. Eine Änderung der Oszillationszahl ist also nur möglich dadurch, daß  $\eta_k(x)$  in  $x=0$  oder  $x=1$  einmal den Wert Null passiert. Für Werte  $\alpha$  und  $\beta$ , die keine ganzen Zahlen sind, ist aber diese Eventualität ausgeschlossen, weil dann  $\eta_k(x)$  sowohl in  $x=0$  als in  $x=1$  sicher zum Exponenten Null gehört.

Dem Gesagten zufolge gilt für  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$  das normale Oszillationstheorem, wenn dieses etwa für  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  Geltung besitzt. Nun führt aber eine durch

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{|x||x-1|}} \quad 0 \leq x \leq 1$$

vermittelte Transformation (von  $x$ )<sup>11)</sup> (H) und ( $R_0$ ) für  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  über in

$$(C) \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \lambda \eta = 0$$

und

$$(S) \quad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_{t=\omega} = 0 \quad (t_{x=1} = \omega).$$

Die Eigenfunktionen sind hier  $\cos \frac{k\pi t}{\omega}$ , die Eigenwerte  $-\left(\frac{k\pi}{\omega}\right)^2$  ( $k = 0, 1, \dots$ ); es gilt das normale Oszillationstheorem.

Um die Oszillationstheoreme für nicht ganzzahlige Werte  $\alpha > 1$  oder  $\beta > 1$  zu erhalten, müssen wir nur  $(\eta_k)_{x=0}$  (bzw.  $(\eta_k)_{x=1}$ ) als Funktion von  $\alpha$  oder  $\beta$  in der Umgebung der ganzzahligen Werte  $\alpha = 1, 2, \dots$  (bzw.  $\beta = 1, 2, \dots$ ) untersuchen; die Theoreme werden ausschließlich durch die Werte  $E(\alpha)$  und  $E(\beta)$  bestimmt sein, unter  $E(\alpha)$  diejenige größte ganze Zahl verstanden, welche nicht größer ist als  $\alpha$ .

Das ergibt folgendes Programm für die weitere Untersuchung: *Erstens* wird man feststellen, wie sich die Oszillationszahl von  $\eta_k(x)$  beim Durch-

<sup>11)</sup> Vgl. Hilb: Kleinsche Theoreme, Math. Ann. 66 (1908), S. 229.

gange, etwa von  $\alpha$ , durch einen ganzzahligen Wert ändert. Zweitens wird man dann mit Hilfe des für  $E(\alpha) = E(\beta) = 0$  geltenden, normalen Oszillationstheorems die Oszillationszahl selbst bestimmen.

Um den *ersten Punkt* zu erledigen, halte man *zunächst*  $\beta$  fest und lasse nur  $\alpha$  sich ändern.  $\beta$  soll keine ganze Zahl, im übrigen aber beliebig sein. Die Betrachtung von  $\eta_k(x)$  lehrt, daß  $(\eta_k)_{x=0} = c_0^{(k)} \neq 0$  für alle  $k < \alpha$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Es genügt somit die Betrachtung der Werte  $k \geq \alpha$ . Sei gesetzt  $\alpha = M - \varepsilon$ , unter  $M \geq 1$  eine ganze Zahl verstanden. Die positive Zahl  $\varepsilon$  möge abnehmend durch Null zu negativen Werten übergehen. In Frage kommen die Werte  $k \geq M$ . Die Koeffizienten von  $\eta_k(x)$  sind ganze rationale Funktionen von  $\varepsilon$ .

Zunächst hat man

$$c_0^{(k)} = \varepsilon(-1)^{M-1}(M-1)!(k-M)![1+O(\varepsilon)]^{12}$$

und diese Darstellung gilt auch für  $M=1$  oder  $M=k$ ; dabei ist  $0! = 1$  angenommen. Ebenso fehlt in den nächstfolgenden Koeffizienten  $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_{M-1}^{(k)}$  das von  $\varepsilon$  freie Glied. Dagegen ist

$$c_M^{(k)} = \frac{(-1)^M}{M!} k!(k+1-M-\beta)(k+1-M-\beta+1)\dots(k-\beta)[1+O(\varepsilon)].$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \eta_k(x) &= \varepsilon(-1)^{M-1}(M-1)!(k-M)![1+O(\varepsilon)+O(x)] \\ &\quad + \frac{(-1)^M}{M!} k!(k+1-M-\beta)\dots(k-\beta)[1+O(\varepsilon)+O(x)]x^M. \end{aligned}$$

Man vergleicht nun  $\eta_k(x)$  hinsichtlich seiner in der Umgebung von  $x=0$  gelegenen Nullstellen mit dem Binom

$$H_k(x) = -\varepsilon A(k, M) + (k+1-M-\beta)(k+1-M-\beta+1)\dots(k-\beta)x^M.$$

Dabei ist

$$A(k, M) = \frac{(M-1)!(k-M)!M!}{k!} > 0 \quad (k \geq M).$$

Die Gleichung  $H_k(x) = 0$  habe die Wurzeln  $x_\mu^*$  ( $\mu = 1, \dots, M$ ), welche (soweit sie nicht reell) einander paarweise konjugiert komplex sind. Der soeben gegebenen Darstellung von  $\eta_k(x)$  zufolge läßt sich eine Umgebung  $|x| < D$  von  $x=0$  festlegen<sup>13</sup> derart, daß für alle  $|\varepsilon| \leq \delta(D)$  die Eigenfunktion  $\eta_k(x)$  ebenfalls genau  $M$  reelle bzw. paarweise konjugiert komplexe Nullstellen  $x_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, M$ ) besitzt, und zwar in der Umgebung  $|x_\mu| < D$  von  $x=0$ .

<sup>12</sup>  $O(\varepsilon)$  bedeutet eine von  $\varepsilon$  abhängige Größe, für die  $\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}$  beschränkt bleibt, wenn  $\varepsilon \rightarrow 0$  geht.

<sup>13</sup> Sogenanntes Theorem von Rouché. Siehe z. B. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie 1 (Leipzig 1922), S. 185.

Jede der Nullstellen  $x_1^*, \dots, x_M^*$  von  $H_k(x)$  stellt einen Näherungswert dar für je eine der Nullstellen  $x_1, \dots, x_M$  von  $\eta_k(x)$ ; und zwar entspricht einer reellen positiven (bzw. reellen negativen bzw. komplexen) Nullstelle von  $\eta_k(x)$  ein reeller positiver (bzw. reeller negativer bzw. komplexer) Näherungswert, und umgekehrt. Das folgt aus einfachen Betrachtungen.

Die Änderung der Oszillationszahl von  $\eta_k(x)$  in  $x=0$  läßt sich somit durch Betrachtung von  $H_k(x)$  feststellen, wenn  $\alpha$  den ganzzahligen Wert  $M$  passiert, wenn also  $\varepsilon$  abnehmend durch Null geht, während  $E(\beta) < \beta$  bleibt. Je nach dem Vorzeichen der Koeffizienten von  $H_k(x)$ , d. h. also je nach der Größe von  $k$ , hat man verschiedene Fälle:

Fall Ia:  $0 \leq k \leq M-1$ . Die Oszillationszahl ändert sich überhaupt nicht,

weil, wie bereits betont,  $\eta_k(x=0) \neq 0$  bleibt.

Fall II:  $M \leq k \leq E(\beta)$  unter der Voraussetzung, daß  $1 \leq M \leq E(\beta)$ . In  $H_k(x)$  hat unter dieser Voraussetzung der Koeffizient von  $x^M$  das gleiche Vorzeichen wie  $(-1)^M$ ; denn jeder der  $M$  Faktoren ist negativ. Ist nun  $M$  gerade, so hat, bei  $\varepsilon > 0$ , die reine Gleichung  $H_k(x) = 0$  eine positive und eine negative reelle Wurzel, außerdem  $(M-2)$  komplexe Wurzeln. Rückt  $\varepsilon$  durch Null ins Negative, so werden diese beiden reellen Wurzeln rein imaginär; alle übrigen  $(M-2)$  Wurzeln sind wieder komplex. Der ursprünglich vorhandenen positiven Wurzel von  $H_k(x) = 0$ , nicht aber der negativen, entspricht genau eine reelle Nullstelle von  $\eta_k(x) = 0$  in  $(0, 1)$ . Bei abnehmendem  $\varepsilon$  geht diese Nullstelle somit verloren und die Oszillationszahl vermindert sich um Eins. Hingegen erhöht sich die Oszillationszahl um Eins, wenn  $M$  ungerade ist. Denn eine entsprechende Betrachtung zeigt, daß nunmehr mit abnehmendem  $\varepsilon$  eine einfache reelle Nullstelle von  $\eta_k(x)$  wachsend durch  $x=0$  hindurch nach  $(0, 1)$  hineinwandert. Ebenso sieht man im

Fall Ib:  $E(\beta) + 1 \leq k \leq M + E(\beta) - 1$  unter der Voraussetzung, daß  $2 \leq M \leq E(\beta)$  folgendes:

Je nachdem  $M + E(\beta) - k$  gerade oder ungerade ist, wird die Oszillationszahl um Eins vermindert oder vermehrt.

Schließlich bleibt noch der

Fall III:  $M + E(\beta) \leq k$ . Für solche  $k$  erniedrigt sich die Oszillationszahl immer um Eins.

Ganz Entsprechendes ergibt sich für variables  $\beta$  bei festem  $\alpha$  ( $E(\alpha) < \alpha$ ). In den oben angegebenen, die einzelnen Fälle kennzeichnenden Ungleichungen, z. B. in  $M + E(\beta) \leq k$  für Fall III, ist dabei jetzt überall  $E(\beta)$  zu ersetzen durch  $E(\alpha)$ .

Um nun zweitens die Oszillationszahlen selbst zu bestimmen, gehe man aus vom Falle des normalen Oszillationstheorems, also von  $E(\alpha) = E(\beta) = 0$ . Man lasse zuerst  $\beta$  bis zu einem beliebigen Werte ( $E(\beta) < \beta$ ) wachsen, während  $\alpha$  festgehalten wird. Wegen  $E(\alpha) = 0$  kommen nur die Fälle Ia und III in Frage. Man erkennt: Die zu  $k = 0, 1, \dots, E(\beta)$  gehörigen Eigenwerte sind charakterisiert durch die Oszillationszahl Null, während zu  $k = E(\beta) + \nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , die Oszillationszahl  $\nu$  gehört.

Man hält jetzt  $\beta$  fest ( $E(\beta) < \beta$ ) und läßt  $\alpha$  zunehmen, mit der Einschränkung  $E(\alpha) \leq E(\beta)$ . Nun spielen sofort auch die Fälle II und Ib eine Rolle.

Die unter II zu subsummierenden Eigenwerte haben immer sämtlich die nämliche Oszillationszahl. Und da für  $E(\alpha) = 0$ , wie eben gezeigt, diese Oszillationszahl Null ist, so folgt aus der im Falle II gültigen Regel: Die Oszillationszahl ist Null oder Eins, je nachdem  $E(\alpha)$  gerade oder ungerade. Die Null wird hier und im folgenden immer den geraden Zahlen hinzugerechnet.

Die Eigenwerte der Fälle Ia und Ib haben hingegen abwechselnd die Oszillationszahl Null oder Eins. Und es gehört z. B. zu  $0 \leq k \leq E(\alpha) - 1$  die Oszillationszahl Null oder Eins, je nachdem  $k$  gerade oder ungerade.

Die Zusammenfassung ergibt für  $0 \leq E(\alpha) < \alpha$ ,  $0 \leq E(\beta) < \beta$ ,  $E(\alpha) \leq E(\beta)$  mithin: Es gehört zu  $\eta_k(x)$

Ia) für  $k = \nu$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, E(\alpha) - 1$ , und unter der Voraussetzung  $1 \leq E(\alpha)$ , die Oszillationszahl Null oder Eins, je nachdem  $\nu$  gerade oder ungerade ist;

II) für  $k = E(\alpha), E(\alpha) + 1, \dots, E(\beta)$ : die Oszillationszahl Null oder Eins, je nachdem  $E(\alpha)$  gerade oder ungerade;

Ib) für  $k = E(\alpha) + E(\beta) - \nu$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, E(\alpha) - 1$  und unter der Voraussetzung  $1 \leq E(\alpha)$ : die Oszillationszahl Null oder Eins, je nachdem  $\nu$  gerade oder ungerade;

III) für  $k = E(\alpha) + E(\beta) + \nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ : die Oszillationszahl  $\nu$ .

Für  $k > E(\alpha) + E(\beta) + 1$  setzt mithin unter allen Umständen das normale Oszillationstheorem ein, abgesehen von den Oszillationszahlen Null und Eins. Unterhalb  $E(\alpha) + E(\beta)$  ist das normale Oszillationstheorem „gestört“. Denn zunächst hat man, falls  $E(\alpha) \geq 1$ , zufolge Ia und Ib zwei Gruppen von je  $E(\alpha)$  Eigenwerten, welche  $k = \nu$  bzw.  $k = E(\alpha) + E(\beta) - \nu$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, E(\alpha) - 1$  entsprechen; für gleiche  $\nu$  hat man gleiche Oszillationszahlen. Daneben existiert (Fall II) eine Gruppe von  $E(\beta) - E(\alpha) + 1$  Eigenwerten, die sämtlich zur Oszillationszahl Null oder Eins gehören.

Zur Feststellung etwa vorhandener irregulärer Paare muß man sich noch die gegenseitige Lage der (reellen) Eigenwerte auf der reellen



$\lambda$ -Achse verdeutlichen. Übersichtlich liegen die Verhältnisse in dem jetzt zu betrachtenden Falle, daß  $\alpha + \beta$  eine ganze Zahl ist; im übrigen bedeutet diese, mit  $E(\alpha) < \alpha$ ,  $E(\beta) < \beta$  verträgliche, Spezialisierung keine Einschränkung der Allgemeinheit. Es gilt dann  $\alpha + \beta - 1 = E(\alpha) + E(\beta)$ , wegen  $E(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$ . Daher fallen die zu gleichem  $\nu$  gehörigen Eigenwerte von Fall Ia und Ib zusammen. Die Anzahl der unter II aufgeführten Eigenwerte ist gerade oder ungerade, je nachdem  $E(\alpha) + E(\beta)$  ungerade oder gerade ist. Im ersteren Falle koinzidieren diese Eigenwerte sämtlich paarweise, während für gerades  $E(\alpha) + E(\beta)$  der zu  $k = \frac{1}{2}(E(\alpha) + E(\beta))$  gehörige Eigenwert hiervon ausgenommen ist, indem er nur einmal vorkommt, und zwar mit der Oszillationszahl Null oder Eins, je nachdem  $E(\alpha)$  und  $E(\beta)$  beide gerade sind oder beide ungerade.

Die Paare koinzidierender Eigenwerte sind irregulär. Ein weiteres irreguläres Paar liefert, falls  $E(\alpha)$  und  $E(\beta)$  ungerade sind, der zu  $k = \frac{1}{2}(E(\alpha) + E(\beta))$  gehörige Eigenwert zusammen mit demjenigen Eigenwerte, der  $k = E(\alpha) + E(\beta) + 1$  zugehört, also ebenfalls die Oszillationszahl Eins besitzt. Hingegen ergänzt für gerades  $E(\alpha)$  und gerades  $E(\beta)$  der zu  $k = \frac{1}{2}(E(\alpha) + E(\beta))$  und mithin zur Oszillationszahl Null gehörige Eigenwert das Oszillationstheorem, welches für die Eigenwerte mit  $k = E(\alpha) + E(\beta) + \nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) gilt, zu einem normalen.

Da einer Vertauschung von  $\alpha$  und  $\beta$  lediglich eine solche von  $x$  mit  $x - 1$  entspricht, so gilt das Oszillationstheorem unverändert auch für  $E(\beta) < E(\alpha)$ .

*Zusammenfassung. Unter der Voraussetzung  $E(\alpha) < \alpha$ ,  $E(\beta) < \beta$  gilt folgendes*

*Oszillationstheorem: A. Wenn  $E(\alpha)$  und  $E(\beta)$  beides gerade Zahlen sind, hat man  $\frac{1}{2}(E(\alpha) + E(\beta))$  verschiedene irreguläre Paare. Die übrigen Eigenwerte sind nach dem normalen Oszillationstheorem geordnet.*

*B. Wenn von den beiden ganzen Zahlen  $E(\alpha)$  und  $E(\beta)$  die eine gerade, die andere hingegen ungerade ist, so gibt es  $\frac{1}{2}(E(\alpha) + E(\beta) + 1)$  verschiedene irreguläre Paare. Die übrigen Eigenwerte sind nach dem normalen Oszillationstheorem geordnet, wobei aber von der Oszillationszahl Null abzusehen ist.*

*C. Wenn  $E(\alpha)$  und  $E(\beta)$  beide ungerade sind, hat man  $\frac{1}{2}(E(\alpha) + E(\beta) + 2)$  verschiedene irreguläre Paare. Die übrigen Eigenwerte sind nach dem normalen Oszillationstheorem geordnet, wenn von den Oszillationszahlen Null und Eins abgesehen wird<sup>14)</sup>.*

<sup>14)</sup> Man vgl. Klein, l. c. 9).



Das normale Oszillationstheorem gilt also ausschließlich im Falle  $E(\alpha) = E(\beta) = 0$ . In allen anderen Fällen ist das Oszillationstheorem gestört.

## § 2.

### Ausdehnung auf allgemeinere Differentialgleichungen und Randbedingungen.

Die Voraussetzung  $E(\alpha) < \alpha$ ,  $E(\beta) < \beta$  wird auch im folgenden ausnahmslos beibehalten; ferner gelten von jetzt ab  $\alpha$  und  $\beta$  als konstant gegenüber allen etwaigen Änderungen von Differentialgleichung und Randbedingung.

Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn fortan nur Differentialgleichungen (F) der speziellen Gestalt

$$(F^*) \quad \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} + \left( \frac{1-\alpha}{x_1} + \frac{1-\beta}{x_1-1} \right) \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{1}{x_1(x_1-1)} (\lambda + \mathfrak{D}_1(x_1)) y_1 = 0$$

betrachtet werden. In der Tat läßt sich (F) durch eine Transformation von der Form

$$x_1 = \xi_1(x); \quad y_1 = \varphi_1(x) y(x)$$

immer in die Form (F\*) setzen. Dabei sind  $\xi_1(x)$  und  $\varphi_1(x)$  von  $\lambda$  unabhängige, in  $I$  regulär-analytische Funktionen von  $x$ , die für reelle  $x$  reellwertig sind; ferner kann erreicht werden, daß  $\varphi_1(x)$  und  $\frac{dx}{dx_1}$  in  $I$  durchaus von Null verschieden sind und daß dem reellen Intervall  $[0, 1]$  der  $x$  eindeutig umkehrbar entspricht das Intervall  $[0, 1]$  der  $x_1$ . Sind diese Annahmen erfüllt, dann bleibt bei der Transformation auch das Oszillationstheorem ungeändert<sup>15)</sup>.

Wie wir weiter unten zeigen, kann man, ausgehend vom Spezialfall des § 1, (H) und (R<sub>0</sub>) stetig so abändern, daß in jedem Stadium der Änderung nur Differentialgleichungen (F\*) und Randbedingungen (R) vorliegen, erstere stets mit den gleichen Exponenten  $\alpha, \beta$ , daß ferner Eigenwerte und Eigenfunktionen weder „verloren“ noch „gewonnen“ werden<sup>16)</sup> und daß sie sich stetig ändern. *Das Oszillationstheorem, wie es am Schlusse von § 1 formuliert wurde, bleibt bei derartigen Änderungen erhalten.*

In der Tat: Die Oszillationszahlen bei reellen Eigenwerten bleiben auf jeden Fall erhalten, weil weder im Intervallinnern noch an den Randpunkten Nullstellen der Eigenfunktion verloren oder gewonnen werden.

<sup>15)</sup> Der Index 1 in  $x_1, y_1$  bleibt im folgenden stets fort.

<sup>16)</sup> Wegen der Begriffe: Erhaltung, Gewinn, Verlust von Eigenwerten siehe weiter unten.

Somit kann eine Modifikation des Theorems im Verlaufe der Änderung nur dadurch zustande kommen, daß von den (ursprünglich durchweg reellen) Eigenwerten gewisse komplex und im weiteren Verlaufe der Änderung unter Umständen dann wieder reell werden; im letzteren Fall können die neu auftretenden reellen Eigenwerte zu einer beliebigen Oszillationszahl gehören. Wie sich unten zeigt, können die komplexen Eigenwerte nur paarweise konjugiert komplex auftreten. Das Komplexwerden von Eigenwerten vollzieht sich daher nur so, daß, allgemein zu reden, eine gerade Anzahl ursprünglich verschiedener reeller Eigenwerte zunächst einmal zusammenrückt. Zusammenfallenden Eigenwerten gehört aber die nämliche Oszillationszahl zu, da die ihnen entsprechenden (normierten) Eigenfunktionen identisch sein müssen. Daher können zu Paaren konjugiert komplexer Eigenwerte lediglich die (reellen) irregulären Paare Anlaß geben. Man sieht aber auch umgekehrt: Wenn eine Anzahl solcher Paare konjugiert komplexer Eigenwerte wieder reell wird, so müssen die so entstehenden (in gerader Zahl vorhandenen) reellen Eigenwerte paarweise die gleiche Oszillationszahl besitzen und irreguläre Paare (im engeren Sinne) liefern. Zwar ist es denkbar, daß auf diese Weise reelle irreguläre Paare in die Reihe der (ihrer Größe nach geordneten) Eigenwerte des normalen Oszillationstheorems eindringen und zwar an beliebiger Stelle; es ist weiterhin denkbar, daß solche „Eindringlinge“ mit Eigenwerten des normalen Oszillationstheorems ihrerseits zusammenrücken<sup>17)</sup>. Aber die Gesamtzahl der irregulären Paare (im weiteren Sinne) bleibt bei allen solchen Vorkommnissen die gleiche; und an dem daneben bestehenden normalen Oszillationstheorem ändert sich gleichfalls nichts. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Die in Aussicht genommenen Änderungen werden in folgender Weise erklärt: Man betrachte die Schar von Differentialgleichungen ( $F^*$ )

$$(F_e^*) \quad y'' + \left(\frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{x-1}\right)y' + \frac{1}{x(x-1)}(\lambda + \varrho \Omega(x))y = 0 \quad (0 \leq \varrho \leq 1),$$

welche den reellen Parameter  $\varrho$  enthält. Der Übergang von (H) und ( $R_0$ ) zu ( $F^*$ ) und (R) erfolgt nun in der Weise, daß  $\varrho$  stetig und monoton wachsend  $[0, 1]$  durchläuft, während gleichzeitig  $A$  und  $B$ , von Null an beginnend, monoton wachsen oder abnehmen, bis sie die gewünschten Werte  $A_0$  bzw.  $B_0$  erreicht haben.

Diese Änderungen genügen den gestellten Anforderungen. Die (normierten) Lösungen  $y_0(x; 0)$ ,  $y_\alpha(x; 0)$ ,  $y_0(x; 1)$ ,  $y_\beta(x; 1)$  sind nämlich

<sup>17)</sup> Ob solche reelle „Eindringlinge“ wirklich vorkommen, wird nicht untersucht. Im hypergeometrischen Falle gibt es keine „Eindringlinge“.

ganze transzendente, für reelle  $\varrho, \lambda$  reellwertige Funktionen von  $\varrho$  und  $\lambda$ . Die Randbedingung (R) ist ferner äquivalent mit

$$(G) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} y_0(x_0; 0) + A y_a(x_0; 0), & y_0(x_0; 1) + B y_\beta(x_0; 1) \\ y'_0(x_0; 0) + A y'_a(x_0; 0), & y'_0(x_0; 1) + B y'_\beta(x_0; 1) \end{vmatrix} = 0,$$

unter  $x_0$  einen festen, im übrigen beliebigen reellen Wert in  $(0, 1)$  verstanden. Die Eigenwerte sind darnach identisch mit den Nullstellen einer in  $\lambda$  ganzen transzendenten Funktion, deren Koeffizienten (bei der Entwicklung nach Potenzen von  $\lambda$ ) ihrerseits ganze transzendente (bzw. rationale) Funktionen von  $\varrho$  (bzw.  $A$  und  $B$ ) mit reellen konstanten Koeffizienten sind. Demzufolge können, wie schon erwähnt, komplexe Eigenwerte nur paarweise konjugiert komplex auftreten. Auch ändern sich Eigenwerte und Eigenfunktionen stetig mit  $\varrho, A, B$ ; insbesondere gilt der Satz von der Erhaltung der Eigenwerte im Kleinen, genauer ausgedrückt: Wenn für  $\varrho = \varrho_0, A = A_0, B = B_0$  in einer Umgebung von  $\lambda = \lambda_0$  im ganzen  $m$  (verschiedene oder teilweise oder sämtlich zusammenfallende, reelle oder komplexe) Eigenwerte sich vorfinden, so gibt es in der gleichen Umgebung immer genau  $m$  Eigenwerte, vorausgesetzt, daß  $\varrho, A$  und  $B$  nur hinreichend wenig von den Ausgangswerten abweichen<sup>19)</sup>.

Ein Verlust oder Gewinn von Eigenwerten und Eigenfunktionen könnte demnach bei den gewählten Änderungen nur dadurch zustande kommen, daß der betrachtete Eigenwert seinem absoluten Betrage nach über alle Grenzen wächst oder daß das Umgekehrte stattfindet. Aber auch dies ist ausgeschlossen. Der Beweis hierfür gründet sich auf die erst in § 3 zu beweisende Tatsache, daß für die Lösungen  $y_0(x; 0)$  bzw.  $y_a(x; 0)$  usw. von  $(E_c^*)$  folgende asymptotische Darstellungen gelten für genügend große  $|\lambda|$  und  $0 \leq \varrho \leq 1$ :

$$y_0(x; 0) = \psi_0(t)(lt)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos\left(lt + \frac{2\alpha-1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{l} e^{\mp it}(lt)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right),$$

$$y_a(x; 0) = \psi_0(t)(lt)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos\left(lt - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{l} e^{\mp it}(lt)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\text{z. B. in } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$y_0(x; 1) = \psi_1(\tau)(l\tau)^{\beta-\frac{1}{2}} \cos\left(l\tau + \frac{2\beta-1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{l} e^{\mp i\tau}(l\tau)^{\beta-\frac{1}{2}}\right),$$

$$y_\beta(x; 1) = \psi_1(\tau)(l\tau)^{\beta-\frac{1}{2}} \cos\left(l\tau - \frac{2\beta+1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{l} e^{\mp i\tau}(l\tau)^{\beta-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\text{z. B. in } \frac{1}{2} \leq \tau \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dabei ist  $l = 2\sqrt{\lambda}$ , und zwar derjenige Wurzelwert, dessen Realteil  $\Re(l)$

<sup>19)</sup> Nach dem in <sup>18)</sup> zitierten Satze.

nicht negativ ist:  $\Re(l) \geq 0$ . Ferner ist  $t = +\sqrt{x}$  bzw.  $\tau = +\sqrt{1-x}$ , für reelle  $x$  in  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  bzw. in  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ . In  $e^{\mp i t}$  und  $e^{\mp i \tau}$  ist das negative oder positive Zeichen zu nehmen, so daß stets  $\Re(\mp i l t) \geq 0$ ,  $\Re(\mp i l \tau) \geq 0$ .

Die Funktionen  $\psi_0(t)$ ,  $\psi_1(\tau)$  sind von  $\varrho$  und  $l$  unabhängig, in den betreffenden Intervallen regulär analytisch, reellwertig und durchaus von Null verschieden. Das Symbol  $O(\varphi)$  bedeutet eine Funktion  $\Phi$ , für die  $\frac{\Phi}{\varphi}$  mit  $|l| \rightarrow +\infty$  beschränkt bleibt.

Entsprechend hat man

$$\frac{dy_0(x; 0)}{dx} = -\psi_0(t) \frac{l}{2t} (lt)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin\left(lt + \frac{2\alpha-1}{4}\pi\right) + O(e^{\mp i t} (lt)^{\alpha-\frac{1}{2}})$$

für  $0 \leq \varrho \leq 1$  und z. B.  $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  usw.

Diese asymptotischen Darstellungen führt man in (G) ein. Setzt man noch

$$\operatorname{tg} a = A, \quad \operatorname{tg} b = B, \quad -\frac{\pi}{2} < a < +\frac{\pi}{2},$$

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} l, \quad \alpha_0 = -\frac{2\alpha-1}{4}\pi, \quad \beta_0 = -\frac{2\beta-1}{4}\pi,$$

und wird von nichtverschwindenden Faktoren der Gleichung  $\Delta(\lambda) = 0$  abgesehen, so liefern einige einfache Umformungen

$$(G) \quad \frac{\Delta(l)}{e^{\mp i 2 l \pi}} = \frac{d(x)}{e^{\mp i 2 l \pi}} = \frac{\delta(x, a, b)}{e^{\mp i 2 l \pi}} + O\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \delta(x, a, b) = & [\cos(\alpha_0 + \beta_0) \cos(a + b) + \sin(\alpha_0 - \beta_0) \sin(a - b)] \sin 2x \\ & - [\cos(\alpha_0 - \beta_0) \sin(a + b) + \sin(\alpha_0 + \beta_0) \cos(a - b)] \cos 2x. \end{aligned}$$

Die in  $x$  ganze transzendente Gleichung  $\delta(x, a, b) = 0$  hat lauter reelle, einfache, im konstanten Abstände  $\frac{\pi}{2}$  aufeinanderfolgende Wurzeln und zwar für beliebige reelle Werte  $A, B$  und nicht ganzzahlige Werte von  $\alpha$  und  $\beta$ .

Tatsächlich verschwinden, wie die Rechnung zeigt, die Koeffizienten von  $\cos 2x$  und  $\sin 2x$  in  $\delta(x, a, b)$  gleichzeitig nur dann, wenn  $\alpha = \frac{1}{2\pi}(\pi - 4\alpha_0)$  und  $\beta = \frac{1}{2\pi}(\pi - 4\beta_0)$  beides ganze Zahlen sind; es war aber  $E(\alpha) < \alpha$ ,  $E(\beta) < \beta$  vorausgesetzt.

Wegen der Voraussetzung  $\Re(x) = \Re\left(\frac{1}{\sqrt{2}}l\right) \geq 0$  kommen die negativen Wurzeln von  $\delta(x, a, b) = 0$  im folgenden nicht weiter in Frage, die Betrachtung beschränkt sich vielmehr durchaus auf die Halbebene  $\Re(x) \geq 0$

als Bild der komplexen  $\lambda$ -Ebene. Um jetzt nachzuweisen, daß bei den betrachteten Änderungen kein Eigenwert „im Unendlichen“ verloren oder gewonnen wird, schreibe man die (nicht negativen) Nullstellen von  $\delta(\kappa, a, b) = 0$  in der Form  $\kappa_n = \kappa_0 + \frac{\pi}{2}n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $0 \leq \kappa_0 < \frac{\pi}{2}$ . Für  $a = b = 0$  sei  $\kappa_n = \tilde{\kappa}_n$ . Die  $\kappa_n$  sind stetige Funktionen von  $a$  und  $b$  und es gibt eine positive GröÙe  $\vartheta$ , so daß  $|\kappa_n - \tilde{\kappa}_n| < \frac{\pi}{8}$  für  $|a| \leq \vartheta$ ,  $|b| \leq \vartheta$ ; der Bedeutung von  $a$  und  $b$  entsprechend soll überdies hier und im folgenden immer  $|a| \leq \frac{\pi}{2} - h$ ,  $|b| \leq \frac{\pi}{2} - h$ , unter  $h$  eine beliebig kleine, vorgegebene, positive GröÙe verstanden. Aus den Eigenschaften der — in  $\delta(\kappa, a, b)$  auftretenden — Exponentialfunktion ergibt sich ferner die Existenz zweier fester, reeller, positiver Zahlen  $\eta$  und  $s$  von der Beschaffenheit, daß

$$\left| \frac{\delta(\kappa, a, b)}{e^{\frac{\pi}{4} + 2i\pi}} \right| > s \quad \text{für alle} \quad \left| \kappa - \left| \tilde{\kappa}_n + \frac{\pi}{4} \right| \right| \leq \eta, \quad |a| \leq \vartheta, \quad |b| \leq \vartheta,$$

wobei  $n = 0, 1, \dots$ .

Und daraus schließt man<sup>19)</sup>, falls nur  $|a| \leq \vartheta$ ,  $|b| \leq \vartheta$ , auf die Existenz einer festen Zahl  $L_0$ , so beschaffen, daß alle Nullstellen von

$$\frac{d(\kappa)}{e^{\frac{\pi}{4} + 2i\pi}} = 0,$$

für welche  $|\kappa| > L_0$  ( $\Re(\kappa) \geq 0$ ), reell und einfach sind.  $L_0$  ist abhängig höchstens von  $\vartheta$ , sicher unabhängig von  $\varrho$ . Ferner folgt, daß zwischen  $\tilde{\kappa}_m + \frac{\pi}{4} + \eta$  und  $\tilde{\kappa}_{m+1} + \frac{\pi}{4} - \eta$  immer nur eine einzige reelle derartige Nullstelle liegt, sobald  $m$  genügend groß ist. Ein Gewinn oder Verlust von Eigenwerten findet daher nicht statt bei den durch  $0 \leq \varrho \leq 1$ ,  $|a| \leq \vartheta$ ,  $|b| \leq \vartheta$  charakterisierten Änderungen. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Nullstellen  $\kappa_n$  als Funktionen von  $a$  und  $b$  ergibt sich schließlich, daß die Eigenwerte erhalten bleiben überhaupt bei allen Änderungen, für die  $0 \leq \varrho \leq 1$ ,  $|a| \leq \frac{\pi}{2} - h$ ,  $|b| \leq \frac{\pi}{2} - h$ .

### § 3.

#### Herleitung der asymptotischen Darstellung.

Es ist schließlich nachzuweisen, daß die in § 2 benutzten asymptotischen Darstellungen richtig sind. Das geschieht mit Hilfe der klassischen Methode von Liouville<sup>19)</sup>.

<sup>19)</sup> Vgl. z. B. Kneser: Bestimmung des Geschlechtes usw., Jahresbericht. d. d. Math. Ver. 24 (1915), S. 36 ff., für das Folgende auch Hilb: Über die Laplacesche Reihe, Math. Zeitschrift 5 (1919), S. 20.

Das Verfahren sei etwa für  $y_0(x; 0)$  erläutert. Man beweist zuerst, daß  $y_0(x; 0)$  asymptotisch dargestellt wird durch die zum Exponenten Null gehörige, geeignet normierte Lösung von

$$(B) \quad \frac{d^2 Y^*}{dx^2} + \frac{1-\alpha}{x} \frac{dY^*}{dx} + \frac{1}{x} Y^* = 0.$$

Um  $(F_e^*)$  mit (B) in Beziehung zu setzen, transformiert man  $(F_e^*)$  vermöge  $y = \psi_0(x) Y(x)$  auf die folgende Form

$$(B_e) \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{1-\alpha}{x} \frac{dY}{dx} + \frac{1}{x} Y = (\mathfrak{P}_1(x) + \varrho \mathfrak{P}_2(x)) Y = \mathfrak{P}_3(x; \varrho) Y.$$

Dabei sind  $\mathfrak{P}_1(x)$  und  $\mathfrak{P}_2(x)$  sowie  $\psi_0(x)$  von  $\varrho$  und  $\lambda$  unabhängig, ferner regulär analytisch etwa in dem durch  $\Re(x) \leq \frac{1}{2}$  charakterisierten Teilbereiche  $\Gamma_1$  von  $\Gamma$  und reellwertig für reelle  $x$ ; außerdem ist  $\psi_0(x)$  in  $\Gamma_1$  von Null verschieden;  $\psi_0(x)$  kann diesen Forderungen gemäß stets bestimmt werden.

Es ist aber, unter  $Y_0^*(x)$  bzw.  $Y_a^*(x)$  die zum Exponenten 0 bzw.  $\alpha$  gehörige geeignet normierte Lösung von (B) verstanden,

$$(1) \quad Y_0^*(x) = (lt)^\alpha J_{-\alpha}(lt), \quad Y_a^*(x) = (lt)^\alpha J_\alpha(lt),$$

wobei wieder  $l = 2\sqrt{\lambda}$ ,  $\Re(l) \geq 0$  und  $t = \sqrt{x}$ ,  $\Re(t) \geq 0$ .<sup>20)</sup>  $J_{-\alpha}$  und  $J_\alpha$  bezeichnen die Besselschen Funktionen erster Art<sup>21)</sup>. Nebenbei hat man

$$D(x) = Y_0^*(x) \frac{dY_a^*(x)}{dx} - \frac{dY_0^*(x)}{dx} Y_a^*(x) = 4^\alpha b_0 \lambda^\alpha x^{\alpha-1} = b_0 l^{2\alpha} t^{2\alpha-2};$$

$b_0$  ist eine von  $\lambda$  und  $x$  unabhängige Konstante<sup>22)</sup>.

Die allgemeine Lösung von  $(B_e)$  ist demnach

$$(2) \quad Y(x) = c_0 Y_0^*(x) + c_\alpha Y_a^*(x) - Y_0^*(x) \int_a^x \frac{Y_a^*(\zeta)}{D(\zeta)} \mathfrak{P}_3(\zeta; \varrho) Y(\zeta) d\zeta \\ + Y_a^*(x) \int_0^x \frac{Y_0^*(\zeta)}{D(\zeta)} \mathfrak{P}_3(\zeta; \varrho) Y(\zeta) d\zeta.$$

$c_0$  und  $c_\alpha$  hängen von  $x$  nicht ab.

$a$  sei eine Stelle in  $(0, \frac{1}{2})$ , so nahe an  $x=0$ , daß der Kreis  $\mathfrak{K}_a$  durch  $a$ , welcher  $x=0$  zum Mittelpunkt hat, ganz zu  $\Gamma_1$  gehört; im übrigen kann über  $a$  noch verfügt werden. Die Integrale seien entlang der reellen  $x$ -Achse erstreckt.

<sup>20)</sup> Vgl. z. B. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen (Leipzig 1904), S. 130.

<sup>21)</sup> Nielsen, l. c.<sup>20)</sup>, schreibt  $J^{(\frac{+}{-})\alpha}$  statt  $J^{(\frac{+}{-})\alpha}$ .

<sup>22)</sup> Nielsen, l. c.<sup>20)</sup>, S. 23.

Nun gehört  $Y(x)$  und damit auch  $y(x)$  zum Exponenten Null dann und nur dann, wenn es sich beim Umlauf von  $x$  in  $\Gamma_1$  um  $x=0$  nicht ändert. Bei einem derartigen Umlaufe multiplizieren sich  $Y_a$  und  $D$  je mit dem Faktor  $f = e^{2\pi i a}$ . Somit gehört  $Y(x)$  dann und nur dann zum Exponenten Null, wenn

$$(3) \quad c_a = -\frac{f}{1-f} \int \frac{Y_0^*(\zeta)}{D(\zeta)} \mathfrak{P}_a(\zeta; \varrho) Y(\zeta) d\zeta.$$

Um zu einer Abschätzung von  $c_a$  zu kommen, wähle man  $a = \left(\frac{\mu_0}{|l|}\right)^2$ ;  $\mu_0$  ist eine reelle, positive, fortan festzuhaltende Konstante. Für genügend große  $|l|$ , etwa für  $|l| > |l_0|$  genügt  $a$  den oben gestellten Bedingungen.

Wegen (1) ist nun auf jedem  $\mathfrak{R}_a$ , d. h. für  $|x| = a$ , und für alle  $|l| > |l_0|$ ,  $0 \leq \varrho \leq 1$ ,

$$|Y_0^*(x)| \leq A, \quad |Y_a^*(x)| \leq A, \quad |\mathfrak{P}_a(x; \varrho)| \leq P;$$

dabei sind  $A$  und  $P$  feste Konstanten.

Wird ferner gesetzt

$$\text{Max} |Y(x)| \leq m(l; \varrho) \quad \text{für} \quad |x| = a, \quad 0 \leq \varrho \leq 1,$$

so hat man zufolge (2)

$$m(l; \varrho) \leq (|c_0(l; \varrho)| + |c_a(l; \varrho)|) A + 2 \cdot 2\pi \left(\frac{\mu_0}{|l|}\right)^2 A^2 \cdot P \frac{m(l; \varrho)}{\mu_0^{2(a-1)} |l|^2 |b_0|}.$$

Mithin ist <sup>23)</sup>

$$(4) \quad m(l; \varrho) = O(|c_0(l; \varrho)| + |c_a(l; \varrho)|);$$

und wegen (3)

$$|c_a(l; \varrho)| \leq \left| \frac{f}{1-f} \right| 2\pi \left(\frac{\mu_0}{|l|}\right)^2 P A \frac{m(l; \varrho)}{|b_0| \mu_0^{2(a-1)} |l|^2}$$

oder

$$|c_a(l; \varrho)| = O\left(\frac{|c_0(l; \varrho)|}{|l|^2}\right).$$

Übrigens hat man die Verfügung über  $c_0(l; \varrho)$  noch frei. Jetzt kann nach der Liouvilleschen Methode gezeigt werden, daß die zum Exponenten Null gehörige Lösung von  $(B_\varrho)$  bzw.  $(F_\varrho^*)$  asymptotisch dargestellt wird durch  $Y_0^*(x)$ . Um schließlich die asymptotische Darstellung durch Exponentialfunktionen zu erhalten, braucht man nur auf die bekannten diesbezüglichen Darstellungen für die Besselschen Funktionen  $J_{-\alpha}$  und  $J_\alpha$  zurückzugreifen <sup>24)</sup>.

<sup>23)</sup> Das Symbol  $O(\ )$  hat die Seite 142 angegebene Bedeutung.

<sup>24)</sup> Nielsen, l. c. <sup>20)</sup>, S. 154.

Ganz entsprechend zeigt man, daß die zum Exponenten  $\alpha$  gehörige Lösung  $Y_\alpha(x)$  von  $(B_\varrho)$  sich darstellt in der Form

$$Y_\alpha(x) = \gamma_0 Y_0^*(x) + \gamma_\alpha Y_\alpha^*(x) - Y_0^*(x) \int_a^x \frac{Y_\alpha^*(\zeta)}{D(\zeta)} \mathfrak{P}_\alpha(\zeta; \varrho) Y_\alpha(\zeta) d\zeta \\ + Y_\alpha^*(x) \int_a^x \frac{Y_0^*(\zeta)}{D(\zeta)} \mathfrak{P}_\alpha(\zeta; \varrho) Y_\alpha(\zeta) d\zeta,$$

wobei

$$|\gamma_0(l; \varrho)| = O\left(\frac{|\gamma_\alpha(l; \varrho)|}{|l|^4}\right).$$

Daraus folgt dann wieder, daß sich  $Y_\alpha(x)$  asymptotisch verhält wie  $Y_\alpha^*(x)$ .

(Eingegangen am 16. 8. 1922.)



# Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper.

Von

E. Artin in Hamburg.

## 1.

Über die Frage, ob die Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers  $K$  teilbar ist durch die Zetafunktion eines Unterkörpers  $k$  von  $K$ , das heißt, ob die Funktion  $\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)}$  eine ganze Funktion ist, liegen bis jetzt nur in speziellen Fällen Resultate vor, da wir von den Zerlegungsgesetzen der Primideale eines Unterkörpers im Oberkörper noch recht wenig wissen. Für rein kubische Körper hat bereits Dedekind<sup>1)</sup> die Frage in bejahendem Sinne beantwortet.

Aus dem Satze von Takagi<sup>2)</sup>, daß jeder relativ Abelsche Körper  $K$  Klassenkörper in bezug auf den Grundkörper  $k$  ist, folgt für die Funktion  $\zeta_K(s)$  unmittelbar die Zerlegung<sup>3)</sup>:

$$(1) \quad \zeta_K(s) = \zeta_k(s) \cdot \prod_{\chi} L(s, \chi),$$

wo  $\chi$  alle vom Hauptcharakter verschiedenen eigentlichen Charaktere der zugehörigen Klassengruppe durchläuft.

Damit ist die Frage bejahend beantwortet für alle jene relativ metazyklischen Zahlkörper, die sich aus übereinandergetürmten relativ Abelschen Körpern aufbauen lassen, unter anderem also für alle metazyklisch-Galoischen Körper; gleichzeitig deckt (1) die einfache Natur des Quotienten

<sup>1)</sup> Dedekind: Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Körpern, J. f. Math. 121, S. 40 f.

<sup>2)</sup> Takagi, T.: Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers, Journal of the College of Science, Tokyo 1920, § 23, 24.

<sup>3)</sup> Weber, H.: Lehrbuch der Algebra, 3, § 163 f.

der beiden Zetafunktionen auf. Wir werden von diesem Resultat noch Gebrauch zu machen haben.

Im folgenden soll nun die Frage für eine weitere allgemeine Klasse relativ metazyklischer Körper erledigt werden, insbesondere für alle jene mit quadratfreiem Relativgrade.

Daß die dabei verwendete Methode sich nicht auf metazyklische Fälle beschränkt, wird am Beispiel des „Ikosaederkörpers“ gezeigt, für den Fall also, wo der Körper relativ Galoissch und seine Gruppe die Ikosaedergruppe ist. Hier wissen wir bekanntlich nichts über die Zerlegungsgesetze der Primideale.

## 2.

Zur leichteren Handhabung der noch auseinanderzusetzenden Methode erweist sich folgender Hilfssatz als bequem, der, wie sein Beweis zeigt, im wesentlichen schon in den Dedekind-Hilbertschen Sätzen über relativ Galoissche Körper steckt:

**Hilfssatz.**  $K$  sei ein beliebiger Körper über dem Grundkörper  $k$ .  $\Omega$  der zu  $K$  gehörige in bezug auf  $k$  relativ Galoissche Körper.  $\mathfrak{p}$  sei ein nicht in der Relativdiskriminante von  $K$ , also auch nicht in der von  $\Omega$  aufgehendes Primideal in  $k$ ,  $\mathfrak{P}$  ein Primteiler von  $\mathfrak{p}$  in  $\Omega$ ,  $f$  der Relativgrad von  $\mathfrak{P}$ .

$\mathfrak{G}$  sei die Galoissche Gruppe von  $K$ ,  $g$  die Zerlegungsgruppe von  $\mathfrak{P}$ , die dann zyklisch vom Grade  $f$  ist.  $\pi$  sei eine erzeugende Substitution von  $g$ .

Wenn dann  $\pi$  in  $e$  Zyklen von je  $f_1, f_2, \dots, f_e$  Elementen zerfällt, so zerfällt  $\mathfrak{p}$  im Körper  $K$  in genau  $e$  Primideale der Relativgrade  $f_1, f_2, \dots, f_e$ .

**Beweis.** Der Körper  $K$  gehört zur Gruppe  $\mathfrak{G}_0$  aller Permutationen von  $\mathfrak{G}$ , welche die Ziffer 0 fest lassen.

Auf die Primidealteiler von  $\mathfrak{p}$  in  $\Omega$  wenden wir nun die Permutationen von  $\mathfrak{G}_0$  an, wodurch sie in  $e$  Gruppen:

$$\mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{P}_{i2}, \dots, \mathfrak{P}_{ir_i} \quad (i = 1, 2, \dots, e)$$

zerfallen mögen von der Art, daß durch die Permutationen von  $\mathfrak{G}_0$  immer nur die Primideale einer Gruppe ineinander übergehen. Unser Primideal  $\mathfrak{P}$  sei etwa  $\mathfrak{P}_{11}$ .

Die Ideale  $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{P}_{i1}, \mathfrak{P}_{i2}, \dots, \mathfrak{P}_{ir_i}$  sind dann bekanntlich Primideale in  $K$  und es gilt:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \dots, \mathfrak{q}_e.$$

$f_i$  sei der Relativgrad von  $\mathfrak{q}_i$  in bezug auf den Grundkörper  $k$ .

Endlich bestimmen wir eine Permutation  $S_{ik}$  aus  $\mathcal{G}$  so, daß

$$S_{ik}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}_{ik}$$

ist.

Die Permutation  $\pi_{ik} = S_{ik} \pi S_{ik}^{-1}$  ist dann erzeugendes Element der Zerlegungsgruppe  $\mathfrak{g}_{ik}$  von  $\mathfrak{P}_{ik}$ .

Die Zerlegungsgruppe von  $\mathfrak{P}_{ik}$  in bezug auf  $K$  als Grundkörper ist der Durchschnitt von  $\mathfrak{g}_{ik}$  von  $\mathcal{G}_0$ . Ihr Grad  $f'_i$  ist gleich dem Relativgrade von  $\mathfrak{P}_{ik}$  in bezug auf  $K$ , so daß  $f = f_i f'_i$  ist. Erzeugt wird sie also durch die Permutation  $\pi_{ik}^{f'_i}$ .

$\pi_{ik}^{f'_i}$  ist somit die niedrigste Potenz von  $\pi_{ik}$ , welche zu  $\mathcal{G}_0$  gehört, die Ziffer 0 also fest läßt. In  $\pi_{ik}$  liegt also 0 in einem Zyklus von  $f_i$  Elementen.

Dieser Zyklus führt uns wegen  $\pi = S_{ik}^{-1} \pi_{ik} S_{ik}$  auf einen Zyklus von  $\pi$ , der aus  $f_i$  Elementen besteht.

Würden nun  $\pi_{ik}$  und  $\pi_{jh}$  auf denselben Zyklus in  $\pi$  führen, so müßte zunächst  $f_i = f_j$  sein. Sei etwa, wenn wir unser Augenmerk nur auf die Elemente der fraglichen Zyklen lenken und die Indizes dieser Elemente modulo  $f_i$  schreiben:

$$\pi_{ik} = (0, a_1, a_2, \dots, a_{f_i-1}), \dots; \quad \pi_{jh} = (0, b_1, \dots, b_{f_j-1}), \dots$$

$$S_{ik} = \begin{pmatrix} c_0, c_1, c_2, \dots, c_{f_i-1}, \dots \\ 0, a_1, a_2, \dots, a_{f_i-1}, \dots \end{pmatrix}$$

also:

$$\pi = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{f_i-1}), \dots$$

Dann wäre also für gewisses  $r$ , wenn noch  $a_0 = b_0 = 0$  gesetzt wird:

$$S_{jh} = \begin{pmatrix} c_r, c_{r+1}, \dots, c_{r+f_j-1}, \dots \\ b_0, b_1, \dots, b_{f_j-1}, \dots \end{pmatrix}$$

also:

$$\pi_{jh} S_{jh} S_{ik}^{-1}(a_r) = \pi_{jh} S_{jh}(c_r) = \pi_{jh}(b_{r-r}) = b_r.$$

Die Permutation  $S = \pi_{jh} S_{jh} S_{ik}^{-1}$  würde also die Ziffer 0 in Ruhe lassen und somit zu  $\mathcal{G}_0$  gehören. Da aber:

$$S(\mathfrak{P}_{ik}) = \pi_{jh}(\mathfrak{P}_{jh}) = \mathfrak{P}_{jh}$$

ist, gehören  $\mathfrak{P}_{ik}$  und  $\mathfrak{P}_{jh}$  zur gleichen Gruppe, es ist also  $i = j$ .

In  $\pi$  gibt es also sicher  $e$  Zyklen von  $f_1, f_2, \dots, f_e$  Elementen. Da  $\sum f_i = n$  ist und  $n$  die Zahl der Ziffern ist, sind dies alle Zyklen von  $\pi$  und unser Hilfssatz ist bewiesen.

## 3.

Nun sei  $K$  relativ metazyklisch vom Primzahlpotenzgrade  $l^n$  in bezug auf  $k$ . Die Galoissche Gruppe  $\mathcal{G}$  sei primitiv und überdies folgendermaßen beschaffen:

Wir ordnen den  $l^n$  Ziffern der Permutationsgruppe  $\mathcal{G}$  die Elemente eines Galoisschen Feldes mit  $l^n$  Elementen zu.  $\mathcal{G}$  soll dann eine „lineare Gruppe“ sein in dem Sinne, daß sich die Permutationen  $\pi$  von  $\mathcal{G}$  darstellen lassen in der Form:

$$\pi = (z, az + b).$$

Für den Fall  $n = 1$  lassen sich bekanntlich alle metazyklischen Gruppen in dieser Form darstellen, für  $n > 1$  zeigt bereits die symmetrische Gruppe von vier Elementen, daß dies nicht mehr der Fall ist.

Aus der vorausgesetzten Transitivität und Primitivität erkennt man leicht, daß die genauere Struktur von  $\mathcal{G}$  die folgende ist:

$g$  sei eine Primitivzahl des Galoisschen Feldes,  $m$  ein Teiler von  $l^n - 1$ :

$$(2) \quad l^n - 1 = m \cdot r.$$

$\mathcal{G}$  besteht dann aus den  $m \cdot l^n$  Permutationen:

$$\pi = (z, g^{ir} z + b) \quad (i = 0, 1, \dots, (m-1)),$$

wo  $b$  alle Elemente des Feldes durchläuft.

Was den Grad und die Zyklen von  $\pi$  betrifft, so stellt man leicht folgendes fest:

1.  $i = 0$ . Grad von  $\pi$  ist dann  $l$ ;  $\pi$  zerfällt in  $l^{n-1}$  Zyklen von je  $l$  Elementen.

2.  $i \neq 0$ ;  $e = (i, m)$ ;  $m = ef$ .  $\pi$  ist dann vom  $f$ -ten Grade und besteht aus einem eingliedrigen und  $e \cdot r$   $f$ -gliedrigen Zyklen.

Sei nun  $\Omega$  der zu  $K$  gehörige relativ Galoissche Körper. Unter  $\Omega_0$  verstehen wir den Unterkörper von  $\Omega$ , der zur Gruppe  $\mathcal{G}_0$  der Permutationen der Form  $(z, z + b)$  gehört. Er ist vom  $m$ -ten Grade in bezug auf den Körper  $k$ .

$\mathfrak{p}$  sei nun ein nicht in der Relativediskriminante von  $K$  aufgehendes Primideal von  $k$ ,  $\mathfrak{P}$  ein Primteiler  $f$ -ten Relativgrades von  $\mathfrak{p}$  in  $\Omega$ . Da die Zerlegungsgruppe zyklisch vom  $f$ -ten Grade sein muß, können nur folgende Möglichkeiten für die Zerlegung von  $\mathfrak{p}$  eintreten:

1. In  $\Omega$  ist  $\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^{l^{n-1}-m} \mathfrak{P}_i$ , wo die  $\mathfrak{P}_i$  vom  $l$ -ten Relativgrade sind.

Die Zerlegungsgruppe besteht dann aus den Potenzen von  $\pi = (z, z + b)$  mit  $b \neq 0$ .

Auf Grund unseres Hilfssatzes zerfällt also  $\mathfrak{p}$  in  $K$  in das Produkt von  $l^{n-1}$  Primidealen  $l$ -ten Grades.

Da ferner die Zerlegungsgruppe Untergruppe von  $\mathfrak{G}_0$  ist, ist sie auch Zerlegungsgruppe von  $\mathfrak{P}$  in bezug auf  $\Omega_0$ , die  $\mathfrak{P}_i$  haben also auch in bezug auf  $\Omega_0$  den Relativgrad 1: In  $\Omega_0$  zerfällt also  $\mathfrak{p}$  in  $m$  Primideale ersten Grades.

2. Ist  $e$  ein Teiler von  $m$ :  $m = ef$ , so gilt in  $\Omega$ :  $\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^{f \cdot e} \mathfrak{P}_i$ , wo die  $\mathfrak{P}_i$  vom  $f$ -ten Relativgrade sind. Die Zerlegungsgruppe ist dann im Falle  $e = m$  die Einheit, sonst besteht sie aus den Potenzen einer Permutation  $\pi$  der Form:  $\pi = (z, g^{re} z + b)$ .

In  $K$  zerfällt also  $\mathfrak{p}$  in ein Primideal ersten Grades und  $r \cdot e$  Primideale  $f$ -ten Grades.

Der Durchschnitt der Zerlegungsgruppe mit  $\mathfrak{G}_0$  ist 1. Die  $\mathfrak{P}_i$  haben also in bezug auf  $\Omega_0$  den Relativgrad 1. In  $\Omega_0$  ist demnach  $\mathfrak{p}$  das Produkt von  $e$  Primidealen  $f$ -ten Grades.

Der Beitrag zur Produktdarstellung der Zetafunktionen unserer vier Körper, der vom Primideal  $\mathfrak{p}$  herrührt, ist somit:

$$\begin{array}{cccc} \Omega & K & \Omega & k \\ \left(\frac{1}{1-Np-ls}\right)^{l^{n-1}m} & \left(\frac{1}{1-Np-ls}\right)^{l^{n-1}} & \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^m & \frac{1}{1-Np-s} \\ \left(\frac{1}{1-Np-fs}\right)^{l^ne} & \left(\frac{1}{1-Np-fs}\right)^{re} \frac{1}{1-Np-s} & \left(\frac{1}{1-Np-fs}\right)^e & \frac{1}{1-Np-s} \end{array}$$

Wegen (2) erkennt man unmittelbar, daß in der Produktentwicklung von:

$$\zeta_{\Omega} \zeta_K^{-m} \zeta_{\Omega_0}^{-1} \zeta_k^m$$

höchstens die endlich vielen Faktoren aus der Relativdiskriminante stehen bleiben können, wobei  $\zeta_{\Omega}, \zeta_K, \zeta_{\Omega_0}, \zeta_k$  die Zetafunktionen unserer Körper bedeuten.

Unter Benutzung der Funktionalgleichung erkennt man also auf Grund einer zuerst von Herrn Hecke<sup>4)</sup> angewendeten Schlußweise das Bestehen der Relation:

$$\zeta_{\Omega} \zeta_K^{-m} \zeta_{\Omega_0}^{-1} \zeta_k^m = 1$$

oder:

$$(3) \quad \zeta_K^m \zeta_{\Omega_0} = \zeta_{\Omega} \zeta_k^m.$$

Nun ist die Gruppe  $\mathfrak{G}_0$  von  $\Omega$  in bezug auf  $\Omega_0$  Abelsch. Wegen (1) ist also:

$$\zeta_{\Omega} = \zeta_{\Omega_0} \cdot L_1, L_2, \dots, L_{l^n-1},$$

<sup>4)</sup> Hecke, E.: Über eine neue Anwendung der Zetafunktion auf die Arithmetik der Zahlkörper. Göttinger Nachrichten 1917.

wo die  $L_i$   $L$ -Reihen im Körper  $\Omega_0$  sind. Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich die gewünschte Formel:

$$(4) \quad \zeta_K = \zeta_k \cdot \sqrt[n]{L_1 L_2 \dots L_{t-1}}.$$

Die Teilbarkeit ist also erwiesen für alle metazyklischen Körper, die sich aus unseren Körpern aufbauen.

Da nun für zusammengesetzten Grad die Gruppe imprimitiv ist, also auf ein Problem mit Primzahlpotenzgrad zurückführt und da für Primzahlgrad die Gruppe sicher linear ist, ist die Teilbarkeit für alle quadratfreien Grade sicher gestellt.

Der Quotient der beiden Zetafunktionen ist stets ein Produkt aus Radikalen von  $L$ -Reihen in gewissen Körpern.

Als Beispiel nehmen wir einen beliebigen relativ kubischen Körper  $K$  über  $k$ , der nicht relativ zyklisch ist, da sonst bereits (1) zur Anwendung gelangt.  $d$  sei die Diskriminante der Gleichung einer ihn erzeugenden Zahl. Dann ist  $\Omega_0$  der relativ quadratische Körper  $k(\sqrt{d})$ .

Nach (4) ist dann, wenn  $L_1, L_2$  zwei (überdies konjugierte)  $L$ -Reihen aus  $k(\sqrt{d})$  bedeuten:

$$(5) \quad \zeta_K = \zeta_k \sqrt{L_1 L_2}.$$

Im Falle eines rein kubischen Relativkörpers (Kubikwurzel) ist speziell  $\Omega_0 = k(\sqrt{-3})$ .

#### 4.

Die soeben auseinandergesetzte Methode besteht im wesentlichen darin, passende Relationen zwischen den Zetafunktionen verschiedener Unterkörper aufzustellen, aus denen sich dann die gewünschte Teilbarkeit ablesen läßt.

Im allgemeinen metazyklischen Fall scheitert dies an unserer Unkenntnis der Konstitution der Gruppe für Primzahlpotenzgrade. Die Körper verhalten sich dann auch wesentlich anders, und man muß andere Relationen zu Hilfe nehmen, um zum Ziel zu gelangen.

Für relativ biquadratische Körper ist durch das Vorige noch der Fall der symmetrischen Gruppe unerledigt geblieben.

Hier kann man zwischen den Zetafunktionen der Unterkörper von  $\Omega$  sechs wesentlich verschiedene Relationen aufstellen, von denen aber nur eine zum Ziel führt. Diese wollen wir aufstellen, die Rechnung aber nur skizzieren.

Wir wählen zwei Unterkörper  $\Omega_3$  und  $\Omega_6$  von  $\Omega$  vom 3. bzw. 6. Grade. Sie gehören bezüglich zu den Untergruppen  $\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4$ :

$$\mathfrak{G}_3: 1, (12)(34), (13)(24), (1423), (12), (34), (1324), (1423),$$

$$\mathfrak{G}_4: 1, (12), (34), (12)(34).$$

Für die verschiedenen Möglichkeiten für die Zerlegungsgruppe  $g$  in  $\Omega$  lauten dann — die Rechnung ist analog der vorigen — die Beiträge zu den Zetafunktionen der vier Körper  $k$ ,  $\Omega_3$ ,  $K$ ,  $\Omega_6$  (von  $g$  ist immer nur der Typus der erzeugenden Permutation angegeben):

$g$	$\Omega_6$	$K$	$\Omega_3$
1	$\left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^6$	$\left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^4$	$\left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3$
(12)	$\left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3 \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3$	$\frac{1}{1-Np-s} \cdot \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3$	$\frac{1}{1-Np-s} \cdot \frac{1}{1-Np-s}$
(12)(34)	$\left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3 \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3$	$\left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3$	$\left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3$
(123)	$\left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3$	$\frac{1}{1-Np-s} \cdot \frac{1}{1-Np-s}$	$\frac{1}{1-Np-s}$
(1234)	$\frac{1}{1-Np-s} \cdot \frac{1}{1-Np-s}$	$\frac{1}{1-Np-s}$	$\frac{1}{1-Np-s} \cdot \frac{1}{1-Np-s}$

Der Beitrag zu  $k$  ist natürlich stets  $\frac{1}{1-Np-s}$ . Nennen wir unsere  $\zeta$ -Funktionen  $\zeta, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_6$ , so findet man unmittelbar die Relation:

$$(6) \quad \zeta_4 \zeta_3 = \zeta_6 \zeta.$$

Da  $\mathcal{G}_4$  Untergruppe von  $\mathcal{G}_6$  ist, ist  $\Omega_3$  Unterkörper von  $\Omega_6$ ,  $\Omega_6$  ist also relativ quadratisch zu  $\Omega_3$ .

Ist also  $L$  eine  $L$ -Reihe im kubischen Körper  $\Omega_3$ , so folgt aus (1):

$$\zeta_6 = \zeta_3 L.$$

Eingesetzt in (6) liefert dies:

$$(7) \quad \zeta_4 = \zeta \cdot L.$$

Der Vollständigkeit halber setzen wir noch die Formel für einen biquadratischen Körper mit alternierender Gruppe her. Für ihn folgt aus (4):

$$(8) \quad \zeta_4 = \zeta \cdot \sqrt[3]{L_1 L_2 L_3},$$

wobei es sich wieder um  $L$ -Reihen eines kubischen Körpers handelt.

Der Fall eines biquadratischen Körpers mit Gruppe 8. Grades läßt sich, da die Gruppe imprimitiv ist, bereits durch (1) erledigen.

## 5.

Endlich behandeln wir noch den Fall eines Ikosaederkörpers als Beispiel eines nicht-metazyklischen Körpers.

Wir wählen in unserem Körper — er werde  $\Omega_{60}$  genannt — einen Unterkörper  $\Omega_5$  vom 5. Grade und stellen die Gruppe dar als die zugehörige Permutationsgruppe von fünf Elementen. Ferner bestimmen wir

zwei weitere Unterkörper  $\Omega_6$  und  $\Omega_{15}$  von  $\Omega_{40}$  vom 6. bzw. 15. Grade, welche resp. zu den Gruppen  $\mathfrak{G}_{10}$  und  $\mathfrak{G}_4$  gehören mögen:

$$\mathfrak{G}_{10}: (12345)^7, (25)(34), (12)(35), (13)(45), (14)(23), (15)(24),$$

$$\mathfrak{G}_4: 1, (23)(45), (24)(35), (25)(34),$$

wo in  $\mathfrak{G}_{10}$   $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$  sein kann.

Für die Erzeugende  $\pi$  der Zerlegungsgruppe in  $\Omega_{60}$  ergeben sich folgende Typen als Möglichkeiten:

1.  $\pi = 1$ . In  $\Omega_{15}$ ,  $\Omega_6$ ,  $\Omega_5$  ist dann  $p$  ein Produkt von bzw. 15, 6, 5 Primidealen 1. Grades.

2.  $\pi = (12)(34)$ . In  $\Omega_{60}$  ist  $p$  ein Produkt von 30 Primidealen 2. Grades. Ihre Zerlegungsgruppen sind die Konjugierten zu  $\pi$ , deren Anzahl 15 ist. Je zwei dieser Primideale haben also die gleiche Zerlegungsgruppe. Bei zehn dieser Primideale besteht also der Durchschnitt mit  $\mathfrak{G}_{10}$  aus zwei Elementen, sie sind also vom 2. Relativgrad in bezug auf  $\Omega_6$ , bei den übrigen 20 ist er 1. In  $\Omega_6$  zerfällt also  $p$  in zwei Primideale vom 1. und zwei Primideale vom 2. Relativgrade.

Bei sechs Primidealen besteht ferner der Durchschnitt mit  $\mathfrak{G}_4$  aus zwei Elementen, sie sind also vom 2. Grade in bezug auf  $\Omega_{15}$ , bei den übrigen ist er 1. In  $\Omega_{15}$  ist somit  $p$  das Produkt aus drei Primidealen 1. und sechs Primidealen 2. Relativgrades.

In  $\Omega_5$  zerfällt nach unserem Hilfssatz  $p$  in zwei Primideale 2. und ein Primideal 1. Relativgrades.

3.  $\pi = (123)$ . In  $\Omega_{60}$  zerfällt  $p$  in 20 Primideale 3. Grades. Ihre Zerlegungsgruppen sind teilerfremd zu  $\mathfrak{G}_{10}$  und  $\mathfrak{G}_4$ , sie sind also vom 1. Relativgrad in bezug auf  $\Omega_6$  und  $\Omega_{15}$ . In  $\Omega_6$  und  $\Omega_{15}$  ist also  $p$  in zwei bzw. fünf Primideale 3. Grades zerlegbar. In  $\Omega_5$  zerfällt es in zwei Primideale 1. und ein Primideal 3. Relativgrades.

4.  $\pi = (12345)$ . In  $\Omega_{60}$  ist  $p$  durch zwölf Primideale 5. Grades teilbar, deren Zerlegungsgruppen die sechs konjugierten zu  $\pi$  sind, so daß je zwei Primideale die gleiche Zerlegungsgruppe haben. Bei zwei Primidealen ist also der Durchschnitt mit  $\mathfrak{G}_{10}$  aus fünf Elementen bestehend, so daß auch in bezug auf  $\Omega_6$  ihr Relativgrad 5 ist, bei den zehn übrigen Primidealen ist er 1. In  $\Omega_6$  besteht also  $p$  aus einem Primteiler 5. und einem vom 1. Grade.

Der Durchschnitt mit  $\mathfrak{G}_4$  ist stets 1, die Primideale sind also in bezug auf  $\Omega_{15}$  vom 1. Grade. In  $\Omega_{15}$  zerfällt somit  $p$  in drei Primideale 5. Grades.

In  $\Omega_5$  ist  $p$  selbst Primideal 5. Relativgrades.

Andere Möglichkeiten für die Zerlegungsgruppe gibt es in der Ikosaedergruppe nicht. Die Beiträge zu den vier Funktionen  $\zeta_{15}$ ,  $\zeta_6$ ,  $\zeta_5$ ,  $\zeta$  lauten dann in den vier Fällen:



$$\begin{array}{cccc}
 \Omega_{15} & \Omega_6 & \Omega_5 & \Omega \\
 \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^{15}, & \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^6, & \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^5, & \frac{1}{1-Np-s}, \\
 \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^6 \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3, & \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3 \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^2, & \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^2 \frac{1}{1-Np-s}, & \frac{1}{1-Np-s}, \\
 \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^5, & \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3, & \frac{1}{1-Np-s} \cdot \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^2, & \frac{1}{1-Np-s}, \\
 \left(\frac{1}{1-Np-s}\right)^3, & \frac{1}{1-Np-s} \cdot \frac{1}{1-Np-s}, & \frac{1}{1-Np-s}, & \frac{1}{1-Np-s}.
 \end{array}$$

Unmittelbar erkennt man wieder die Relation:

$$(9) \quad \zeta_5 \zeta_6^2 = \zeta^3 \zeta_{15}.$$

$\Omega_5$  gehört nun zur Gruppe aller Permutationen der Ikosaedergruppe, welche die Ziffer 1 fest lassen.  $\mathcal{G}_4$  ist eine ausgezeichnete Untergruppe davon.  $\Omega_5$  ist also Unterkörper von  $\Omega_{15}$ , und zwar ist  $\Omega_{15}$  relativ zyklisch vom 3. Grad in bezug auf  $\Omega_5$ . Wegen (1) gilt also:

$$\zeta_{15} = \zeta_5 L_1^{(6)} L_2^{(6)},$$

wobei  $L_i^{(6)}$   $L$ -Reihen im Körper  $\Omega_5$  bedeuten. Analog schreiben wir weiter  $L_i^{(6)}$  usw.

Eingesetzt ergibt sich

$$(10) \quad \zeta_6 = \zeta \cdot \sqrt{L_1^{(5)} L_2^{(5)}}.$$

$\zeta_6$  ist somit teilbar durch  $\zeta$ .

Sei nun  $\Omega_{12}$  der Unterkörper 12. Grades, der zur Gruppe  $(12345)^7$  gehört. Er ist relativ quadratischer Oberkörper von  $\Omega_6$ , so daß  $\zeta_{12} = \zeta_6 \cdot L^{(6)}$  ist. Der Ikosaederkörper  $\Omega_{60}$  seinerseits ist relativ zyklisch vom 5. Grad in bezug auf  $\Omega_{12}$ . Es ist also:

$$\zeta_{60} = \zeta_6 L^{(6)} \cdot L_1^{(12)} L_2^{(12)} L_3^{(12)} L_4^{(12)}.$$

Aus (10) ergibt sich also endlich:

$$(11) \quad \zeta_{60} = \zeta \cdot \sqrt{L_1^{(5)} L_2^{(5)}} \cdot L^{(6)} \cdot L_1^{(12)} L_2^{(12)} L_3^{(12)} L_4^{(12)},$$

$\zeta_{60}$  ist also auch teilbar durch  $\zeta$ .

Im ganzen gibt es fünf unabhängige Relationen zwischen den  $\zeta$ -Funktionen der Unterkörper von  $\Omega_{60}$ . Wir begnügen uns damit, sie aufzuzählen. Zu (9) kommt noch hinzu:

$$(12) \quad \zeta_{10} \zeta = \zeta_5 \zeta_6,$$

$$(13) \quad \zeta_{20} \zeta^2 = \zeta_5^3 \zeta_{12},$$

$$(14) \quad \zeta_{30} \zeta^3 = \zeta_6^3 \zeta_{20},$$

$$(15) \quad \zeta_{60} \zeta^5 = \zeta_{12} \zeta_{30}^2.$$

Aus (14) folgt mit Hilfe von (10):

$$(16) \quad \zeta_{30} = \zeta_{30} \cdot L_1^{(5)} L_4^{(5)}.$$

$\zeta_{30}$  ist also teilbar durch  $\zeta_{90}$ . Dies ist ein Beispiel dafür, daß die Teilbarkeit auch eintreten kann, ohne daß der eine Körper oder einer seiner Konjugierten Unterkörper des anderen ist, ja sogar ohne daß nur die Grade durch einander teilbar wären.

Diese sowie die früheren Resultate sind auch eine Quelle von Relationen zwischen den auftretenden  $L$ -Reihen, doch wollen wir nicht weiter darauf eingehen. Ebenso liegt die Bestimmung der Klassenzahl mit Hilfe der Heekeschen Verallgemeinerung der Kroneckerschen Grenzformel auf der Hand.

(Eingegangen am 4. 9. 1922.)

## On a formula of transformation.

Von

Pandit Oudh Upadhyaya in Lucknow (Indien).

The identity  $4X = Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} pZ^2$ , given by Gauss for the transformation of  $X$ , where  $X$  represents  $\frac{x^p-1}{x-1}$ , is well known. There is another identity given by Eisenstein<sup>1)</sup> for the transformation of  $X$  in the form  $27X = f(u, v, w)$ .

Very recently the author of this paper has shown that any number of identities can be easily obtained; and a general method of finding out these identities has been given. There it has been shown that Gauss' identity and Eisenstein's identity are only particular cases of that general theorem. The object of this paper is to find out another formula of the eighteenth degree; and it is believed that it has not been given by any previous author.

Let  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{17}$  be the roots of the cyclotomic eighteenth-sectional periods and let  $X$  be a polynomial of which the coefficients are symmetric functions of the roots of  $X = 0$ , the sum of which makes  $\eta_0 = 0$ . Similarly are  $X_2, X_3, \dots, X_{18}$  defined. [ $X_1, X_2$ , etc. have the same sense as in Mathews' Theory of numbers]. Only that case has been considered here in which  $X$  may be represented in the form  $U + V\eta_0$ .

Therefore for the case in consideration we have identically:

$$\begin{aligned} X_1 &= U + V\eta_0, \\ X_2 &= U + V\eta_1, \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ X_{18} &= U + V\eta_{17}; \end{aligned}$$

where  $U$  and  $V$  are polynomials with integral coefficients.

<sup>1)</sup> Mathematische Abhandlungen (Berlin 1847), Nr. 1; Darstellung des Ausdrucks  $27 \frac{x^p-1}{x-1}$  durch eine kubische Form mit drei Variablen.

Now it is well known that

$$\begin{aligned}
 X &= X_1 X_2 X_3 \dots X_{18} \\
 &= (U + V \eta_0)(U + V \eta_1)(U + V \eta_2) \dots (U + V \eta_{17}) \\
 &= U^{18} + \sum \eta_0 U^{17} V + \sum \eta_0 \eta_1 U^{16} V^2 + \sum \eta_0 \eta_1 \eta_2 U^{15} V^3 + \sum \eta_0 \eta_1 \eta_2 \eta_3 U^{14} V^4 \\
 &\quad + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_4 U^{13} V^5 + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_5 U^{12} V^6 + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_6 U^{11} V^7 \\
 &\quad + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_7 U^{10} V^8 + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_8 U^9 V^9 + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_9 U^8 V^{10} \\
 &\quad + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_{10} U^7 V^{11} + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_{11} U^6 V^{12} + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_{12} U^5 V^{13} \\
 &\quad + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_{13} U^4 V^{14} + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_{14} U^3 V^{15} + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_{15} U^2 V^{16} \\
 &\quad + \sum \eta_0 \eta_1 \dots \eta_{16} U V^{17} + \eta_0 \eta_1 \dots \eta_{17} V^{18}.
 \end{aligned}$$

Substituting the values of these symmetric functions we find that

$$\begin{aligned}
 X &= U^{18} - U^{17} V + a U^{16} V^2 - a_1 U^{15} V^3 + a_2 U^{14} V^4 - a_3 U^{13} V^5 \\
 &\quad + a_4 U^{12} V^6 - a_5 U^{11} V^7 + a_6 U^{10} V^8 - a_7 U^9 V^9 \\
 (A) \quad &+ a_8 U^8 V^{10} - a_9 U^7 V^{11} + a_{10} U^6 V^{12} - a_{11} U^5 V^{13} \\
 &\quad + a_{12} U^4 V^{14} - a_{13} U^3 V^{15} + a_{14} U^2 V^{16} - a_{15} U V^{17} + a_{16} V^{18};
 \end{aligned}$$

where  $a, a_1, a_2$  etc. are the coefficients of  $\eta^{18}, \eta^{15}, \dots, \eta$ , and the constant term respectively in the eighteen-sectional period equation.

Let us apply this theorem to the prime 37, and thus verify the formula in this case. It is known that  $U = x^3 + 1$  and  $V = -x$  for 37 and the period equation of cyclotomic eighteen-section for this prime is:

$$\begin{aligned}
 &\eta^{18} + \eta^{17} - 17 \eta^{16} - 16 \eta^{15} + 120 \eta^{14} + 105 \eta^{13} - 455 \eta^{12} - 364 \eta^{11} \\
 &\quad + 1001 \eta^{10} + 715 \eta^9 - 1287 \eta^8 - 792 \eta^7 + 924 \eta^6 \\
 &\quad + 462 \eta^5 - 330 \eta^4 - 120 \eta^3 + 45 \eta^2 + 9 \eta - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= -17, \quad a_1 = -16, \quad a_2 = 120, \quad a_3 = 105, \quad a_4 = -455, \quad a_5 = -364, \\
 a_6 &= 1001, \quad a_7 = 715, \quad a_8 = -1287, \quad a_9 = -792, \quad a_{10} = 924, \quad a_{11} = 462, \\
 a_{12} &= -330, \quad a_{13} = -120, \quad a_{14} = 45, \quad a_{15} = 9, \quad a_{16} = -1.
 \end{aligned}$$

Substituting these values in (A), we get:

$$\begin{aligned}
 X &= U^{18} - U^{17} V - 17 U^{16} V^2 + 16 U^{15} V^3 + 120 U^{14} V^4 - 105 U^{13} V^5 \\
 &\quad - 455 U^{12} V^6 + 364 U^{11} V^7 + 1001 U^{10} V^8 - 715 U^9 V^9 - 1287 U^8 V^{10} \\
 &\quad + 792 U^7 V^{11} + 924 U^6 V^{12} - 462 U^5 V^{13} - 330 U^4 V^{14} + 120 U^3 V^{15} \\
 &\quad + 45 U^2 V^{16} - 9 U V^{17} - V^{18};
 \end{aligned}$$

if we put  $x=1$  in the formula it becomes:

$$\begin{aligned} 37 = & 262144 + 131072 - 1114112 - 524288 + 1966080 + 860160 \\ & - 1863680 - 745472 + 1025024 + 366080 - 329472 - 101376 \\ & + 59136 + 14784 - 5280 - 960 + 180 + 18 - 1; \end{aligned}$$

and thus we can represent 37 in the form of 18<sup>th</sup> degree with the help of this formula.

Lucknow University.

(Eingegangen am 24. 3. 1922.)

## Berichtigungen

zu dem Aufsatz von J. G. van der Corput: „Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem“ in Band 87, S. 39–65.

Es muß heißen:

Seite 40, Zeile 15 v. o.: (2) statt 2).

„ 40, „ 5 v. u.: Gött. Nachrichten 1914, S. 234–244 statt Acta Mathematica 37, S. 155–191 und 193–239.

„ 43, „ 1 v. o.: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird vorausgesetzt, daß  $f'(u)$  im Intervall  $a \leq u \leq b$  stets  $\geq 0$  oder stets  $\leq 0$  ist.

„ 47, Formel (20):  $v$  statt  $N$ .

„ 48, Zeile 5 v. o.:  $g_1, g_2, \dots, g_q$  statt  $g_1, g_2, \dots, g_q$ .

„ 48, „ 5 v. u.:  $\sqrt[q]{\phantom{x}}$  statt  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

„ 51, „ 1 v. u.:  $l_p \leq 1$  statt  $l_p \leq \frac{1}{2}$ .

„ 55, „ 1 v. u.:  $(1 + k_p)$  statt  $(1 + k_p)$ .

„ 63, „ 6 v. o.: Satz 2 statt Satz 3.

„ 63, „ 11 v. o.:  $a^{1-\frac{1}{Q+1}}$  statt  $a^{1-\frac{1}{Q}}$ .

## Zur Theorie der linearen Integralgleichungen.

Von

R. Courant in Göttingen.

Die folgenden Ausführungen enthalten zwei verschiedene Methoden zur Begründung der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (zweiter Art). Beiden Methoden gemeinsam ist der Gedanke, daß man die Lösungen einer Integralgleichung mit beliebiger Annäherung erhalten muß, wenn man nur den Kern hinreichend genau approximiert, und daß man jeden Kern durch „ausgeartete“ Kerne approximieren kann, für welche man die Integralgleichung auf elementare Weise beherrscht<sup>1)</sup>.

Das Charakteristische der ersten Methode ist die Benutzung eines einfachen wohlbekannten allgemeinen Konvergenzprinzipes für den Grenzübergang<sup>2)</sup>. Die zweite Methode, welche sich mehr als die erste von den üblichen Gedankengängen unterscheidet, beruht auf der Verwendung der Begriffe „Unabhängigkeitsmaß“ und „asymptotische Dimensionenzahl einer Funktionenfolge“, welche schon bei anderer Gelegenheit<sup>3)</sup> von mir benutzt wurden und ein naturgemäßes und häufig brauchbares Hilfsmittel bei der Untersuchung linearer Funktionenscharen bilden.

Über die bekannten Darstellungen geht die gegenwärtige Arbeit insofern auch in den Resultaten hinaus, als sie eine vollständige Beantwortung der Frage nach der Stetigkeit der Abhängigkeit der Lösungen von den Daten des Problems, nämlich dem Kerne, enthält, eine Untersuchung, die

---

<sup>1)</sup> Hier muß auf die Arbeit von Goursat, Bull. Soc. math. de France **35** (1907), S. 163 und die anschließende von Lebesgue ebenda **36** (1908), S. 3 hingewiesen werden, deren Ziel die Herleitung der Fredholmschen Formeln auf Grund der Approximation eines Kernes durch ausgeartete ist.

<sup>2)</sup> Dasselbe Prinzip wird zur Behandlung des Eigenwertproblems in der eleganten Arbeit von Herrn Kellogg, Math. Ann. **86** (1922), S. 14–17 in ähnlicher Art angewendet. — Im übrigen werden dem Kenner die Berührungspunkte dieser Methode mit den klassischen Untersuchungen von Hilbert und Schmidt nicht entgehen.

<sup>3)</sup> Math. Ann. **85** (1922), S. 290 ff.

sich zwanglos der zweiten Methode anschließt. Abgesehen von der prinzipiellen Bedeutung, die bei jedem Problem der Analysis solche Stetigkeitsfragen besitzen, bildet ihre positive Beantwortung hier die theoretische Grundlage für alle Verfahren zur numerischen Behandlung einer Integralgleichung, welche auf Ersetzung des Kernes durch einen einfacheren approximierenden beruhen.

Wir beschränken uns der Kürze halber auf das Problem der Lösung der Integralgleichung von der Form

$$(1) \quad f(s) = \varphi(s) - \int K(s, t) \varphi(t) dt$$

und für den Fall des symmetrischen Kernes  $K(s, t) = K(t, s)$  auf die Diskussion des durch die Gleichung

$$(2) \quad \varphi(s) = \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt$$

gestellten Eigenwertproblems. Dabei wollen wir fürs erste den Kern als stetige Funktion von  $s$  und  $t$  annehmen und im übrigen das ein für allemal feste endliche Integrationsgebiet der Variablen und Definitionsgebiet der auftretenden, durchweg als stetig oder stückweise stetig vorausgesetzten Funktionen nicht besonders bezeichnen.

### I. Vorbemerkungen.

Es sei gestattet, vorweg einige bekannte Tatsachen zusammenzustellen. Wir verstehen unter einem ausgearteten Kern  $A(s, t)$  einen solchen, der sich als Summe von endlich vielen Produkten je einer Funktion von  $s$  mit einer von  $t$  darstellt:  $A = \sum_{r=1}^p \alpha_r(s) \beta_r(t)$ . Wir dürfen und wollen in dieser Darstellung die  $p$  Funktionen  $\alpha_r(s)$  und ebenso die  $\beta_r(s)$  als voneinander linear unabhängig annehmen. Indem man sich die  $2p$  Funktionen  $\alpha_r(s)$ ,  $\beta_r(s)$  durch eine gewisse Anzahl  $m$  linear unabhängiger, zueinander orthogonal und normiert<sup>4)</sup> wählbarer Funktionen  $o_1(s), o_2(s), \dots, o_m(s)$  linear ausgedrückt denkt, kann man dem ausgearteten Kern die Gestalt

$$(3) \quad A(s, t) = \sum_{r, \mu=1}^m a_{r\mu} o_r(s) o_\mu(t)$$

geben. Ist der Kern  $A$  symmetrisch, so folgt für die Koeffizienten  $a_{r\mu}$  die Symmetriebedingung  $a_{r\mu} = a_{\mu r}$ .

Jeder stetige Kern  $K(s, t)$  läßt sich gleichmäßig durch eine Folge ausgearteter Kerne approximieren, da jedes Polynom in  $s$  und  $t$  einen solchen ausgearteten Kern darstellt und nach dem Satze von Weierstraß

<sup>4)</sup> Wir verstehen unter der Norm einer Funktion  $f(s)$  den Ausdruck  $N[f] = \int f(s)^2 ds$  und nennen die Funktion normiert, wenn ihre Norm den Wert 1 hat.



jede in einem abgeschlossenen Gebiete stetige Funktion  $K(s, t)$  sich dort gleichmäßig durch Polynome approximieren läßt.

Für ausgeartete Kerne reduzieren sich die Probleme der Integralgleichungstheorie unmittelbar auf solche der Theorie der linearen Gleichungen und quadratischen Formen. Setzt man nämlich

$$(4) \quad \begin{cases} x_i = \int \varphi(t) \beta_i(t) dt \\ f_i = \int f(s) \beta_i(s) ds \\ C_{r\mu} = \int \alpha_r(s) \beta_\mu(s) ds, \end{cases}$$

so geht (1) über in

$$f(s) = \varphi(s) - \sum_{r=1}^p x_r \alpha_r(s),$$

woraus sich nach Multiplikation mit  $\beta_\mu(s)$  und Integration ergibt

$$(5) \quad f_\mu = x_\mu - \sum_{r=1}^p C_{r\mu} x_r \quad (\mu = 1, 2, \dots, p).$$

Dieses System von  $p$  linearen Gleichungen für die  $p$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_p$  ist mit der Integralgleichung äquivalent; denn ist umgekehrt  $x_1, x_2, \dots, x_p$  eine Lösung des Gleichungssystems, so stellt die Funktion  $\varphi(s) = f(s) + \sum_{r=1}^p x_r \alpha_r(s)$  eine Lösung der Integralgleichung dar; linear unabhängigen Lösungen des Gleichungssystems müssen dabei immer eben solche Lösungen der Integralgleichung entsprechen. Diese Äquivalenz erlaubt uns ohne weiteres, aus den Hauptsätzen der Theorie der linearen Gleichungen das Bestehen der Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne zu schließen:

1. Entweder besitzt die Integralgleichung (1) bei beliebig gegebenem  $f(s)$  eine und nur eine Lösung; oder die homogene, d. h. für  $f(s) = 0$  aus (1) entstehende Gleichung besitzt eine positive Anzahl  $r$  von nicht trivialen, normierten, linear unabhängigen Lösungen  $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$ , „Nulllösungen“.

2. Im letzteren Falle besitzt auch die zum Kerne  $A(t, s)$  gehörige „transponierte“ homogene Integralgleichung genau  $r$  linear voneinander unabhängige Lösungen  $\chi_1(s), \dots, \chi_r(s)$ , und die inhomogene Integralgleichung (1) hat dann und nur dann Lösungen, wenn  $f(s)$  die  $r$  Orthogonalitätsbedingungen

$$\int f(s) \chi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

erfüllt.

Die Lösung der inhomogenen Integralgleichung (1) ist dann nur bis auf eine willkürliche additive Lösung der homogenen bestimmt; sie kann und soll durch die Forderung fixiert werden, daß sie zu den Funktionen  $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$  orthogonal sein möge.

Die Eigenwerttheorie für einen symmetrischen ausgearteten Kern  $A(s, t)$  erledigt sich unmittelbar durch Zurückführung auf das Hauptachsenproblem einer gewöhnlichen quadratischen Form unter Zugrundelegung der Darstellung (3) für den Kern. Ist nämlich  $\lambda$  ein Eigenwert des ausgearteten Kernes  $A(s, t)$ ,  $\varphi$  die zugehörige normierte Eigenfunktion, ist also

$$(6) \quad \varphi(s) = \lambda \int A(s, t) \varphi(t) dt = \lambda \sum_{\mu, \nu=1}^m a_{\mu\nu} x_{\mu} o_{\nu}(s),$$

wobei hier

$$(4a) \quad x_{\nu} = \int \varphi(s) o_{\nu}(s) ds$$

gesetzt ist, so folgt durch Multiplikation mit  $o_{\nu}(s)$  und Integration für die Größen  $x_{\mu}$  das Gleichungssystem

$$(7) \quad x_{\nu} = \lambda \sum_{\mu=1}^m a_{\mu\nu} x_{\mu},$$

in welchem die  $x_{\nu}$  nicht sämtlich verschwinden können, weil sonst wegen (6) auch  $\varphi(s)$  identisch verschwinden würde. Umgekehrt erhalten wir aus einer nicht trivialen Lösung von (7) eine Lösung der Integralgleichung (6). Die Eigenwerte der Integralgleichung sind also identisch mit den Eigenwerten der quadratischen Form

$$\sum_{\mu, \nu=1}^m a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu} = \iint A(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$$

und lassen sich daher vermöge unmittelbarer Übertragung der bekannten charakteristischen Eigenschaften dieser Eigenwerte folgendermaßen definieren: Der kleinste positive Eigenwert  $\lambda_1$  von  $A(s, t)$  ist der reziproke Wert des Maximums der „quadratischen Integralform“

$$J[\varphi, \varphi] = \iint A(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt,$$

wobei diejenigen Funktionen  $\varphi(s)$  zum Vergleich herangezogen werden, für welche die Nebenbedingung

$$(8) \quad N[\varphi] = \int [\varphi(s)]^2 ds \leq 1$$

besteht. Die Funktion  $\varphi_1(s)$ , für welche das Maximum angenommen wird, ist die zugehörige Eigenfunktion. Die weiteren, nach wachsender Größe geordneten positiven Eigenwerte und Eigenfunktionen erhält man ebenso, indem man zu der Nebenbedingung (8) noch weitere Nebenbedingungen  $\int \varphi(s) \varphi_i(s) ds = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, h-1$ ) hinzufügt. Statt dessen kann man den  $h$ -ten positiven Eigenwert  $\lambda_h$  und die zugehörige Eigenfunktion  $\varphi_h$  auch independent durch eine Minimum-Maximum-Eigenschaft folgendermaßen charakterisieren: Es sei  $k\{v_1, v_2, \dots, v_{h-1}\}$  die

obere Grenze von  $J[\varphi, \varphi]$ , wenn die Funktion außer der Bedingung (8) noch den Bedingungen

$$(9) \quad \int \varphi(s) v_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h-1)$$

unterworfen ist, wobei die  $v_1(s), \dots, v_{h-1}(s)$  irgendwelche  $h-1$  stetige Funktionen bedeuten; dann besitzt diese Zahl  $k\{v_1, \dots, v_{h-1}\}$  ein Minimum  $\lambda_h = \frac{1}{\lambda_h}$ , welches erreicht wird für  $v_i = \varphi_i(s)$ ,  $\varphi = \varphi_h(s)$ ; die Zahl  $\lambda_h = (J[\varphi_h, \varphi_h])^{-1}$  ist der  $h$ -te positive Eigenwert.

Ebenso erhält man die negativen Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen, indem man von dem entsprechenden Minimumproblem oder Maximum-Minimumproblem ausgeht. Dabei setzen wir die Reihe der die positiven bzw. negativen Eigenwerte definierenden Extremumsprobleme naturgemäß nur so lange fort, wie bei ihnen wirklich als Lösungen Werte für  $J[\varphi, \varphi]$  von dem vorgeschriebenen Vorzeichen auftreten.

## II. Erste Methode.

### § 1.

#### Hilfsbetrachtungen.

Es sei  $h(t)$  irgendeine stückweise stetige Funktion, für welche lediglich eine Beziehung

$$(10) \quad N[h] = \int [h(t)]^2 dt \leq M$$

vorausgesetzt sei, wobei  $M$  eine feste Schranke bedeutet. Die vermöge solcher Funktionen  $h(t)$  „quellenmäßig dargestellten“ Funktionen

$$(11) \quad g(s) = \int K(s, t) h(t) dt$$

sind bei gegebenem  $K$  nicht nur selbstverständlich stetig, sondern alle Funktionen der so definierten Funktionenmenge der  $g(s)$  sind auch gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig stetig, in dem Sinne, daß es zu jedem positiven  $\varepsilon$  eine nur von  $\varepsilon$ , nicht von dem Individuum  $g(s)$  abhängige und mit  $\varepsilon$  gegen Null strebende Zahl  $\delta(\varepsilon)$  gibt, so daß aus  $|\eta| < \delta$  die Beziehung  $|g(s+\eta) - g(s)| < \varepsilon$  folgt. In der Tat wird infolge der Schwarzischen Ungleichung

$$\begin{aligned} |g(s+\eta) - g(s)|^2 &= \left( \int [K(s+\eta, t) - K(s, t)] h(t) dt \right)^2 \\ &\leq \int [K(s+\eta, t) - K(s, t)]^2 dt \cdot M, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung sich mit Rücksicht auf die Stetigkeit des Kernes als selbstverständlich ergibt. Die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit für die Funktionenmenge bleibt ersichtlich bestehen, wenn man zur Menge auch noch alle die Funktionen hinzunimmt, welche durch Kerne

einer Folge  $K_1(s, t)$ ,  $K_2(s, t)$ , ... mit den obigen Funktionen  $h(t)$  quellenmäßig dargestellt werden, sobald die Kerne  $K_n(s, t)$  mit wachsendem  $n$  gleichmäßig gegen  $K(s, t)$  konvergieren.

Funktionenmengen mit der geschilderten Gleichmäßigkeit der Stetigkeit und Beschränktheit besitzen die Häufungsstelleneigenschaft, die sich in folgendem bekannten Konvergenzprinzip ausspricht:

*Aus jeder gleichmäßig beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionenmenge läßt sich eine gleichmäßig konvergente Folge auswählen.*

Wir bemerken noch folgende selbstverständliche Ergänzung des Prinzips: Wenn es in der Funktionenmenge unendlich viele Gruppen von je  $r$  zueinander orthogonalen normierten Funktionen gibt, so läßt sich eine Teilfolge von Gruppen auswählen, die gleichmäßig gegen eine Gruppe von  $r$  orthogonalen normierten Funktionen konvergiert.

## § 2.

### Die Fredholmschen Sätze.

Indem wir die Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne als bewiesen voraussetzen dürfen, können wir sie nunmehr leicht für einen beliebigen Kern  $K(s, t)$  übertragen. Wir denken uns  $K(s, t)$  gleichmäßig durch eine Folge  $A_1(s, t)$ ,  $A_2(s, t)$ ,  $A_3(s, t)$ , ... von ausgearteten Kernen approximiert, und betrachten mit der Integralgleichung (1) die approximierenden Integralgleichungen

$$(12) \quad f(s) = \varphi(s) - \int A_n(s, t) \varphi(t) dt.$$

Dann sind zwei Fälle möglich:

Fall I: Gleichung (12) besitzt für unendlich viele  $n$  (wir dürfen dann übrigens unter Weglassung nicht passender Approximationsgleichungen und Umnummerierung annehmen: für alle  $n$ ) eine Lösung  $\varphi_n(s)$ , so daß  $N[\varphi_n] = c_n^2 = \int [\varphi_n(s)]^2 ds < M$  bleibt, unter  $M$  eine feste Schranke verstanden.

Fall II: Die obige Annahme ist nicht richtig. Dann ist entweder

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 = \infty, \text{ oder}$$

b) für unendlich viele  $n$  (wir dürfen wieder annehmen: für alle  $n$ ) hat — auf Grund der für ausgeartete Kerne gültigen Fredholmschen Sätze — die homogene Integralgleichung

$$(13) \quad 0 = \varphi(s) - \int A_n(s, t) \varphi(t) dt$$

eine normierte Lösung  $\sigma_n(s)$ , was wir durch die Formel  $c_n = \infty$  sinngemäß symbolisieren können.

Im Falle I sind die Funktionen  $\varrho_n(s) - f(s)$  quellenmäßig durch die Kerne  $A_n$  dargestellt; dabei sind die dargestellten Funktionen nach § 1 gleichmäßig beschränkt und stetig und definieren daher nach unserem Konvergenzprinzip als Limes einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge eine stetige Grenzfunktion  $\varphi(s)$ . Indem wir erlaubterweise den Grenzübergang in der Integralgleichung (12) direkt vornehmen, erkennen wir für diese Grenzfunktion  $\varphi(s)$  das Bestehen der Integralgleichung (1); diese Integralgleichung ist also im Falle I auflösbar.

Im Falle II dividieren wir entweder, falls  $c_n^2$  endlich ist, die Integralgleichung (12) für  $\varphi = \varrho_n$  durch  $c_n$  und setzen  $\frac{\varrho_n}{c_n} = \sigma_n$ , so daß die Gleichung

$$\frac{f(s)}{c_n} = \sigma_n(s) - \int A_n(s, t) \sigma_n(t) dt$$

gilt, oder wir beachten im Falle II b) das Bestehen der Gleichung (13) für  $\varphi = \sigma_n$ . Beide Male ist jedenfalls  $\sigma_n(s)$  normiert; somit gilt wiederum für die quellenmäßig dargestellten Funktionen  $\sigma_n(s) - \frac{f(s)}{c_n}$  bzw.  $\sigma_n(s)$ , daß sie gleichmäßig stetig und beschränkt sind, mithin als gleichmäßigen Limes einer Teilfolge eine Grenzfunktion  $\psi(s)$  definieren, welche notwendigerweise der homogenen Integralgleichung

$$(14) \quad \psi(s) = \int K(s, t) \psi(t) dt$$

genügt und normiert ist. Im Falle II besitzt also die homogene Integralgleichung nicht-triviale Lösungen, die wir Nulllösungen nennen.

Um hieraus die Fredholmschen Sätze abzuleiten, schicken wir in bekannter Weise die Bemerkung voraus, daß die homogene Gleichung jedenfalls nur eine endliche Anzahl  $r$  von linear unabhängigen normierten Lösungen  $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$  besitzen kann; wir dürfen die  $r$  Funktionen  $\psi_i(s)$  als zueinander orthogonal annehmen, und erhalten dann aus der Besselschen Ungleichung, angewandt auf dieses Orthogonalsystem:

$$\int K(s, t)^2 dt \geq \sum_{i=1}^r \left( \int K(s, t) \psi_i(t) dt \right)^2 = \sum_{i=1}^r \psi_i(s)^2,$$

und nach nochmaliger Integration

$$\iint K(s, t)^2 ds dt \geq r,$$

womit für  $r$  eine Schranke gegeben ist. Sei jetzt also  $r$  die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (14). Dann ist entweder  $r = 0$  oder  $r > 0$ . Im Falle  $r = 0$  kann aber offenbar nie der obige Fall II eintreten, da er stets zu einer normierten Lösung von (14) führt; also befinden wir uns im Falle I, d. h. für jede linke Seite  $f(s)$  besitzt die Integralgleichung (1) eine Lösung; diese Lösung ist eindeutig bestimmt,

weil die nicht identisch verschwindende Differenz zweier Lösungen eine nicht-triviale Lösung von (14) gegen die Voraussetzung ergeben würde. Damit ist der erste Fredholmsche Satz bewiesen.

Ist zweitens  $r > 0$ , dann gilt wegen  $A_n \Rightarrow K^*$  für die Funktionen  $\delta_{n,i}(s) = \psi_i(s) - \int A_n(s, t) \psi_i(t) dt$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) die Relation  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,i}(s) = 0$ . Setzen wir nun

$$A'_n(s, t) = A_n(s, t) + \sum_{i=1}^r \delta_{n,i}(s) \psi_i(t),$$

so sind auch die  $A'_n(s, t)$  ausgeartete Kerne, welche den Kern  $K(s, t)$  gleichmäßig approximieren. Die Kerne  $A'_n(s, t)$  besitzen, wie man sofort sieht, sämtlich die  $r$  Funktionen  $\psi_i(s)$  zu Nulllösungen. Mehr linear unabhängige Nulllösungen können bei hinreichend großem  $n$  nicht auftreten; denn wäre  $\psi_{r+1,n}(s)$  eine solche, die wir als normiert und auf  $\psi_1, \dots, \psi_r$  orthogonal annehmen dürfen, so würden wir auf Grund unseres Konvergenzprinzips eine auf  $\psi_1, \dots, \psi_r$  orthogonale, also von diesen Funktionen linear unabhängige Nulllösung von (14) erhalten, entgegen der Voraussetzung, daß  $r$  die genaue Anzahl der Nulllösungen war.

Zufolge der Gültigkeit der Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne besitzt nun die homogene transponierte Integralgleichung

$$(15) \quad x(s) = \int A'_n(t, s) x(t) dt$$

ebenfalls genau  $r$  voneinander unabhängige und als normiert und zueinander orthogonal wählbare Nulllösungen  $x_{n,i}(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Da die ausgearteten Kerne  $A'_n(t, s)$  gleichmäßig gegen den Kern  $K(t, s)$  konvergieren, so erhalten wir auch für diesen  $r$  zueinander orthogonale Nulllösungen  $x_1(s), \dots, x_r(s)$ , indem wir auf Grund unseres Konvergenzprinzips den Grenzübergang mit Hilfe der gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen  $x_{n,i}(s)$  vornehmen. Mehr als  $r$  Lösungen kann die transponierte Integralgleichung

$$(16) \quad x(s) = \int K(t, s) x(t) dt$$

nicht haben, da sonst rückwärts auch die Existenz von mehr als  $r$  Lösungen von (14) folgen würde.

Endlich beachten wir, daß für die Lösbarkeit der Integralgleichung (1) im Falle  $r > 0$  sicherlich die Bedingungen

$$(17) \quad \int f(s) x_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

notwendig sind, wie man unmittelbar erkennt, wenn man (1) mit  $x_i(s)$

<sup>a)</sup> Mit dem Zeichen  $\Rightarrow$  wollen wir stets die Gleichmäßigkeit der Konvergenz ausdrücken.

multipliziert, integriert und dann rechts unter Beachtung von (16) die Integrationsfolge umkehrt. Um die Bedingungen (17) als hinreichend zu erkennen, beschränken wir uns zunächst — sofern dies nötig ist — auf solche Indizes  $n$ , für welche  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{n,i}(s) = \chi_i(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) gilt, und bilden mit den dann sicher bei wachsendem  $n$  gegen Null konvergierenden Zahlen  $\varepsilon_{n,i} = \int f(s) \chi_{n,i}(s) ds$  die Funktionen

$$f_n(s) = f(s) - \sum_{i=1}^r \varepsilon_{n,i} \chi_{n,i}(s).$$

Es ist  $\int f_n(s) \chi_{n,i}(s) ds = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Also besitzt die Integralgleichung

$$(18) \quad f_n(s) = \varphi(s) - \int A'_n(s, t) \varphi(t) dt$$

wegen der Gültigkeit der Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne sicher eine zu  $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$  orthogonale Lösung  $\varrho_n(s)$ . Mit diesen Lösungen  $\varrho_n(s)$  müssen wir uns im Falle I befinden, weil sie andernfalls zu einer auf  $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$  orthogonalen Lösung von (14) führen würde, was nach Voraussetzung unmöglich ist. Also können wir wieder auf Grund des Konvergenzprinzips den Grenzübergang in der Integralgleichung ausführen und somit wegen  $f_n(s) \Rightarrow f(s)$  auf die Lösbarkeit von (1) schließen. Hiermit sind die sämtlichen Fredholmschen Sätze für unseren Kern  $K(s, t)$  bewiesen.

### § 3.

#### Die Eigenwerttheorie bei symmetrischen Kernen.

Ist der Kern  $K(s, t)$  symmetrisch, so läßt er sich durch symmetrische ausgeartete Kerne  $A(s, t)$  gleichmäßig approximieren. Wir zeigen zunächst, daß jeder symmetrische Kern (sofern er nicht identisch verschwindet\*) Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzen muß. Zu diesem Zwecke betrachten wir die „Integralformen“

$$J[\varphi, \varphi] = \iint K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt,$$

$$J_n[\varphi, \varphi] = \iint A_n(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$$

und stellen uns das Problem,  $J[\varphi, \varphi]$  zum Maximum zu machen unter der Nebenbedingung (8).

Hierbei setzen wir voraus, daß  $J$  positiver Werte fähig ist. Andernfalls würden wir statt des Maximumproblems das entsprechende Minimumproblem betrachten.

\*) Das identische Verschwinden eines Kernes ist gleichbedeutend mit dem identischen Verschwinden der zugehörigen Integralform.



Nach der Schwarzschen Ungleichung ist für jede solche Funktion

$$(J[\varphi, \varphi] - J_n[\varphi, \varphi])^2 \leq \iint (K - A_n)^2 ds dt;$$

wegen der Konvergenz der  $A_n$  gegen  $K$  unterscheidet sich also der Wertevorrat der Integralformen  $J_n$  bei hinreichend großem  $n$  von dem der Integralform  $J$  beliebig wenig, gleichviel, welche zulässige Funktion  $\varphi$  wir einsetzen. Mithin konvergieren die Maxima  $\kappa_{1,n} = J_n[\varphi_{1,n}, \varphi_{1,n}]$  der Größen  $J_n$  gegen einen Wert  $\kappa_1$ , nämlich die obere Grenze der Werte  $J[\varphi, \varphi]$ . Diese obere Grenze muß positiv sein.

Die  $\varphi_{1,n}$  sind die zu den Eigenwerten  $\lambda_{1,n} = \frac{1}{\kappa_{1,n}}$  für den Kern  $A_n(s, t)$  gehörigen normierten Eigenfunktionen, so daß gilt

$$\varphi_{1,n}(s) = \lambda_{1,n} \int A_n(s, t) \varphi_{1,n}(t) dt.$$

Diese Relationen lehren uns wegen  $\lambda_{1,n} \rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\kappa_1}$  sofort, daß die Funktionen  $\varphi_{1,n}(s)$  gleichmäßig beschränkt und stetig sind. Unser Konvergenzprinzip liefert uns nun unmittelbar eine Funktion  $\varphi_1(s)$ , welche als gleichmäßiger Limes einer Teilfolge der  $\varphi_{1,n}(s)$  der Relation

$$\varphi_1(s) = \lambda_1 \int K(s, t) \varphi_1(t) dt$$

genügt und somit, da sie normiert ist, eine zum Eigenwert  $\lambda_1$  gehörige Eigenfunktion des Kernes  $K(s, t)$  darstellt.

Genau in derselben Weise können wir die weiteren positiven Eigenwerte  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_h, \dots$  (und natürlich analog die negativen) mit den Eigenfunktionen  $\varphi_2(s), \dots, \varphi_h(s), \dots$  erhalten, indem wir z. B. von dem in der Vorbemerkung gekennzeichneten Minimum-Maximum-Problem für unsere Integralform ausgehen.

Es hätte keine Schwierigkeiten, die hier im ersten Teile benutzten allgemeinen Konvergenzaussagen zu präzisieren, indem man nachträglich die Überflüssigkeit einer komplizierten Auswahl zeigt. Die nunmehr darzustellende zweite Methode erlaubt uns, auf diese Ausführungen zu verzichten, indem sie von vornherein die fraglichen Konvergenzatsachen mit voller Präzision liefert.



## III. Zweite Methode.

## § 4.

Unabhängigkeitsmaß und asymptotische Dimensionenzahl<sup>7)</sup>.

Um ein Maß für die lineare Unabhängigkeit von  $m$  Funktionen  $f_1(s), f_2(s), \dots, f_m(s)$  zu erhalten, bilden wir die quadratische Form in  $x_1, x_2, \dots, x_m$

$$Q(x, x) = N(x_1 f_1 + \dots + x_m f_m) = \int (x_1 f_1 + \dots + x_m f_m)^2 ds \\ = \sum_{i,k=1}^m x_i x_k \int f_i f_k ds.$$

Wir nennen dann das unter der Nebenbedingung  $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 1$  angenommene, bei linearer Abhängigkeit der  $f_i$  und sonst nicht verschwindende Minimum  $u$  von  $Q(x, x)$  das „Unabhängigkeitsmaß“ der Funktionen  $f_1(s), \dots, f_m(s)$ .

Wenn man eine lineare Kombination  $\sum_{i=1}^m y_i f_i(s) = f(s)$  von  $m$  Funktionen  $f_1, f_2, \dots, f_m$  bildet, welche normiert ist, so können alle Koeffizienten  $y_i$  absolut genommen nicht oberhalb der lediglich von dem Unabhängigkeitsmaß  $u$  der  $f_i$  abhängenden Schranke  $\frac{1}{\sqrt{u}}$  liegen. Denn es ist zufolge der Definition von  $u$  für  $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2}}$ :

$$\int \left( \sum_{i=1}^m x_i f_i(s) \right)^2 ds = \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i^2} \geq u.$$

Wenn man daher ein System von  $m$  Funktionen mit einem oberhalb der positiven Schranke  $\alpha^2$  liegenden Unabhängigkeitsmaß orthogonalisiert, d. h. durch geeignete normierte lineare Kombinationen ersetzt, so können dabei niemals Absolutwerte der Koeffizienten oberhalb der Schranke  $\frac{1}{|\alpha|}$  auftreten.

Ist  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \dots$  eine unendliche Funktionenfolge, so sagen wir, sie habe die *asymptotische Dimensionenzahl*  $r$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Bei noch so kleinem positivem  $\varepsilon$  ist nach Weglassung einer hinreichend großen Anfangszahl der Funktionen der Folge das Unabhängigkeitsmaß von je  $r+1$  der übrigbleibenden kleiner als  $\varepsilon$ ; es gibt jedoch nach Weglassung von beliebig vielen der Funktionen noch immer  $r$  Funktionen, deren Unabhängigkeitsmaß oberhalb einer festen

<sup>7)</sup> Vgl. Anm. 3.

positiven Schranke  $\alpha^2$  bleibt. Speziell werden wir sagen, daß  $r=0$  ist, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} N[\varphi_n] = 0$  wird. Wir wollen dabei der Einfachheit halber voraussetzen, daß alle Funktionen  $\varphi_n$  der Folge entweder normiert sind, oder daß doch das Integral  $\int \varphi_n(s)^2 ds = N[\varphi_n]$  unterhalb einer festen, von  $n$  unabhängigen Schranke liegt.

Die innere Bedeutung der eingeführten Begriffsbildung beruht darin, daß eine Funktionenfolge der asymptotischen Dimensionszahl  $r$  als Grenzbilde eine lineare Funktionenschar mit  $r$  Komponenten definiert. Dies gilt allgemein und ist sehr leicht zu zeigen, wenn man unter Zugrundelegung des Lebesgueschen Integralbegriffes und der zugehörigen Theorie alle auftretenden Funktionen nur bis auf eine Menge vom Maße Null als definiert ansieht und alle Integrale im Sinne von Lebesgue versteht. Will man aber, wie wir es hier tun, auf unserem elementaren Standpunkte verharren, so muß man zum Beweise der obigen Aussage noch gewisse einschränkende Voraussetzungen über die Funktionenfolge  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  machen. In dieser Absicht definieren wir:

Eine gleichmäßig beschränkte *Funktionenfolge*  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  heißt *glatt*, wenn aus einer zwischen irgendeiner Anzahl  $j$  ihrer Funktionen bestehenden Relation

$$\int (x_1 \varphi_{n_1} + \dots + x_j \varphi_{n_j})^2 ds < \varepsilon$$

folgt, daß auch  $|x_1 \varphi_{n_1}(s) + \dots + x_j \varphi_{n_j}(s)| < \delta$  ist, wobei  $\delta = \delta(\varepsilon)$  eine nur von  $\varepsilon$  abhängende, mit  $\varepsilon$  zugleich gegen Null konvergierende Zahl bedeutet. Dann gilt der Satz: Ist  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  eine glatte Funktionenfolge der asymptotischen Dimensionszahl  $r$ , so gibt es  $r$  linear voneinander unabhängige (normiert und orthogonal wählbare) Funktionen  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$  derart, daß für hinreichend großes  $n$  jede der Funktionen  $\varphi_n$  sich von einer Funktion der linearen Schar  $x_1 \psi_1 + x_2 \psi_2 + \dots + x_r \psi_r$  überall um weniger als eine beliebig kleine Größe  $\varepsilon$  unterscheidet, während es keine lineare Schar von weniger als  $r$  Komponenten mit derselben Eigenschaft gibt.

Wir können diese lineare Grenzschar auch folgendermaßen charakterisieren: Sind  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_m, \dots$  Gruppen von je  $r$  Funktionen  $\varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}, \dots, \varphi_{m_r}$  der Folge, deren Unabhängigkeitsmaß oberhalb der festen positiven Schranke  $\alpha^2$  liegt und deren Indizes  $m_i$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ) mit wachsendem  $m$  ebenfalls über alle Grenzen wachsen, so konvergieren die durch die Funktionen von  $G_m$  definierten linearen Funktionenscharen  $S_m$  mit wachsendem  $m$  gleichmäßig gegen eine durch  $r$  linear unabhängige Funktionen  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$  definierte Grenzschar  $S$  in dem Sinne, daß bei hinreichend großem  $m$  jede normierte Funktion von  $S_m$  sich von einer Funktion von  $S$  beliebig wenig unterscheidet.

Um den naheliegenden Beweis dieser Tatsachen bequem zu formulieren, sagen wir, eine Funktion  $f$  habe von einer linearen Funktionenschar  $S$  eine Distanz kleiner als die positive Größe  $h$ , wenn  $f$  sich von einer geeigneten Funktion von  $S$  absolut genommen um weniger als  $h$  unterscheidet; ebenso sagen wir, daß zwei lineare Funktionenscharen  $S_1, S_2$  eine Distanz kleiner als  $h$  besitzen, wenn jede normierte Funktion der einen Schar sich von einer solchen der anderen Schar absolut genommen um weniger als  $h$  unterscheidet.

Nun gilt sofort: Bei hinreichend großem  $m$  und  $n$  hat die Funktion  $\varphi_n$  von der Schar  $S_m$  eine beliebig kleine Distanz. Denn das Unabhängigkeitsmaß von  $\varphi_n, \varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}, \dots, \varphi_{m_r}$  ist bei hinreichend großen  $m$  und  $n$  sicher beliebig klein; es gibt also  $r+1$  Zahlen  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_r$ , für die  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 = 1$  ist und für die  $|x_0 \varphi_n + x_1 \varphi_{m_1} + \dots + x_r \varphi_{m_r}|$  beliebig klein wird. Hierbei kann mit wachsendem  $m, n$  die Zahl  $x_0$  absolut genommen nicht beliebig klein werden, da sonst entgegen der Voraussetzung das Unabhängigkeitsmaß von  $\varphi_{m_1}, \dots, \varphi_{m_r}$  beliebig klein würde; also können wir, indem wir durch  $x_0$  dividieren und  $\frac{x_i}{x_0} = -y_i$  setzen, den Schluß ziehen, daß bei hinreichend großem  $m$  und  $n$  die Funktion  $\varphi_n$  sich von der Funktion  $y_1 \varphi_{m_1} + \dots + y_r \varphi_{m_r}$  der Schar  $S_m$  um beliebig wenig unterscheidet. Daher haben auch für hinreichend großes  $m$  und  $n$  die beiden linearen Funktionenscharen  $S_m$  und  $S_n$  eine beliebig kleine Distanz.

Nunmehr sei  $\varepsilon$  eine später als genügend klein zu fixierende positive Zahl,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  eine Folge positiver Zahlen, so daß  $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = \varepsilon$  ist. Es sei ferner  $m_i$  eine ganze positive Zahl, so daß für  $n \geq m_i$  und  $m \geq m_i$  die Distanz von  $S_n$  und  $S_m$  kleiner als  $\varepsilon_i$  ist. Wir gehen von irgendwelchen normierten, linear unabhängigen Funktionen  $\chi_{1,1}, \chi_{1,2}, \dots, \chi_{1,r}$  der Schar  $S_{m_1}$  aus und bestimmen, was nach Voraussetzung möglich ist, in  $S_{m_2}$  die normierten Funktionen  $\chi_{2,1}, \chi_{2,2}, \dots, \chi_{2,r}$  so, daß  $|\chi_{2,i} - \chi_{1,i}| < \varepsilon_1$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) wird. Ebenso bestimmen wir in  $S_{m_3}$  die normierten Funktionen  $\chi_{3,1}, \dots, \chi_{3,r}$  so, daß  $|\chi_{3,i} - \chi_{2,i}| < \varepsilon_2$  wird, usw. Wegen  $|\chi_{h,i} - \chi_{k,i}| < \varepsilon_h + \dots + \varepsilon_k$  ( $h < k$ ) konvergiert mit wachsendem  $n$  die Funktionenfolge  $\chi_{n,i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $\psi_i$ , und es ist ferner  $|\psi_i - \chi_{1,i}| < \varepsilon$ . Wird also  $\varepsilon$  hinreichend klein gewählt, so werden sicherlich auch die Funktionen  $\psi_1, \dots, \psi_r$  zugleich mit  $\chi_{1,1}, \dots, \chi_{1,r}$  ein von Null verschiedenes Unabhängigkeitsmaß haben, also linear unabhängig sein. Die Funktionen  $\psi_1, \dots, \psi_r$  erfüllen offenbar alle gestellten Anforderungen.

## § 5.

**Anwendung auf die Integralgleichungstheorie.**

Die Anwendung der obigen Begriffe in der Integralgleichungstheorie beruht auf folgendem Hilfssatz: Es sei  $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s), \dots$  eine Folge von Funktionen, deren Norm unter einer festen Schranke  $M$  bleibt, und für welche im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz die Relation

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \psi_n(s) - \int K(s, t) \psi_n(t) dt \} = 0$$

gilt. Dann bilden die Funktionen  $\psi_n(s)$  eine glatte Funktionenfolge von endlicher asymptotischer Dimensionenzahl  $r$ .

Zum Beweise beachten wir, daß die Relation (20) auch bestehen bleibt, wenn wir die Funktionen  $\psi_n(s)$  ersetzen durch irgendwelche Funktionen  $\chi_n(s)$ , wobei  $\chi_n(s) = x_1 \psi_{n_1} + \dots + x_p \psi_{n_p}$  eine lineare Kombination mit absolut beschränkt bleibenden Koeffizienten  $x_1, x_2, \dots, x_p$  aus irgendeiner Anzahl  $p$  von solchen Funktionen  $\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \dots, \psi_{n_p}$  der Folge  $\psi_n$  ist, daß dabei die Indizes  $n_i$  mit  $n$  zugleich ins Unendliche wachsen. Gibt es nun unter den Funktionen  $\psi_n(s)$  Gruppen von je  $r$  mit beliebig großen Indizes  $n_i$ , so daß das Unabhängigkeitsmaß dieser Gruppe oberhalb einer festen Schranke  $\alpha^2$  bleibt, ist also mit andern Worten die Dimensionenzahl der Folge mindestens gleich  $r$ , so können wir diese Gruppen jede für sich orthogonalisieren, wobei nach § 4 die auftretenden Koeffizienten absolut genommen unterhalb der Schranke  $\frac{1}{|\alpha|}$  bleiben. So erhalten wir Gruppen von je  $r$  zueinander orthogonalen normierten Funktionen

$$\omega_{n,i}(s), \quad (i = 1, 2, \dots, r; n = 1, 2, 3, \dots),$$

für welche die Limesgleichung

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \omega_{n,i}(s) - \int K(s, t) \omega_{n,i}(t) dt \} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

besteht. Nach der Besselschen Ungleichung ist

$$\begin{aligned} \int K(s, t)^2 ds dt &\geq \sum_{i=1}^r \left( \int K(s, t) \omega_{n,i}(t) dt \right)^2, \\ \iint K(s, t)^2 ds dt &\geq \sum_{i=1}^r \int ds \left( \int K(s, t) \omega_{n,i}(t) dt \right)^2, \end{aligned}$$

und infolge von (21) daher

$$\iint K(s, t)^2 ds dt \geq r.$$

Somit haben wir eine Schranke für die Dimensionenzahl der Folge erhalten und daher diese Zahl als endlich erwiesen. Daß die Folge glatt ist, ergibt sich unmittelbar aus der angenähert quellenmäßigen Darstellung (20).

Erstens ist nämlich, wenn wir unter  $\varepsilon_n$  eine mit wachsendem  $n$  gegen Null strebende Zahl bezeichnen, nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\psi_n(s)^2 \leq \int K(s, t)^2 dt \cdot M + \varepsilon_n,$$

was die absolute Beschränktheit der  $\psi_n$  bedeutet. Zweitens folgt ebenso aus  $\int (x_1 \psi_{n_1} + \dots + x_p \psi_{n_p})^2 ds < \varepsilon$  die Relation

$$(x_1 \psi_{n_1} + \dots + x_p \psi_{n_p})^2 \leq \int K(s, t)^2 dt \cdot \varepsilon + \varepsilon_n.$$

Wir wenden den bewiesenen Hilfssatz zunächst an, um die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes  $K(s, t)$  zu erhalten, der durch die ausgearteten symmetrischen Kerne  $A_n(s, t)$  gleichmäßig approximiert werde. Es seien  $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \dots$  die positiven Eigenwerte,  $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \dots$  die negativen Eigenwerte von  $A_n(s, t)$ ; ferner  $\psi_1^{(n)}(s), \psi_2^{(n)}(s), \dots$  bzw.  $\chi_1^{(n)}(s), \chi_2^{(n)}(s), \chi_3^{(n)}(s), \dots$  die zugehörigen Eigenfunktionen. Mehrfache Eigenwerte sind dabei entsprechend mehrfach angeführt. Es seien wieder

$$J_n[\varphi, \varphi] = \iint A_n(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt \quad \text{und} \quad J[\varphi, \varphi] = \iint K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$$

die zu den Kernen  $A_n$  bzw.  $K$  gehörigen Integralformen, und es sei, wie wir voraussetzen dürfen,  $J$  positiver Werte fähig.  $\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}$  ist das Maximum

von  $J_n$  unter der Nebenbedingung (8);  $\frac{1}{\lambda_1}$  sei die obere Grenze von  $J$  unter derselben Nebenbedingung. Da die Werte von  $J$  und  $J_n$  sich bei hinreichend großem  $n$  um weniger als eine feste beliebig kleine Zahl unterscheiden, so muß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} = \lambda_1$  sein. Es folgt also aus

$$\psi_1^{(n)}(s) - \lambda_1^{(n)} \int A_n(s, t) \psi_1^{(n)}(t) dt = 0$$

wegen  $A_n \Rightarrow K$ :

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \psi_1^{(n)}(s) - \lambda_1 \int K(s, t) \psi_1^{(n)}(t) dt \} = 0.$$

Mithin bilden die Funktionen  $\psi_1^{(n)}$  gemäß unserem Hilfssatz, bei dessen Anwendung  $K$  durch  $\lambda_1 K$  zu ersetzen ist, eine glatte Folge von endlicher, offenbar positiver Dimensionenzahl  $r^{(n)}$  und definieren somit nach § 4 eine lineare Funktionenschar mit den normierten Komponenten  $\psi_{1,1}(s), \dots, \psi_{1,r}(s)$ , welche notwendig Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$\psi_{1,i}(s) - \lambda_1 \int K(s, t) \psi_{1,i}(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

also zum Eigenwert  $\lambda_1$  gehörige Eigenfunktionen von  $K$  sind.

Genau ebenso erhält man die übrigen Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kernes  $K(s, t)$ . Es ist nämlich z. B.  $\lambda_h^{(n)}$  das durch geeignete Wahl

<sup>\*)</sup> Das Verschwinden von  $r$  würde mit der Normierung der Funktionen  $\psi_{1,n}$  im Widerspruch stehen.

der  $v_1, \dots, v_{h-1}$  zu erreichende Minimum des Maximums von  $J_n$  unter der Nebenbedingung (8) und den weiteren Nebenbedingungen (9). Definieren wir wieder  $\frac{1}{\lambda_h}$  als die entsprechende untere Grenze der oberen Grenze von  $J$ , so ist wegen der Nachbarschaft des Wertevorrats von  $J_n$  zu dem von  $J$  wiederum  $\lambda_h^{(n)} \rightarrow \lambda_h$ . Hieraus schließen wir auf die Relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_h^{(n)} - \lambda_h \int K(s, t) \psi_h^{(n)}(t) dt = 0,$$

wonach die weiteren Folgerungen wie oben verlaufen. Um die negativen Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen zu bekommen, haben wir die entsprechenden Minimum- bzw. Maximum-Minimum-Probleme zu betrachten. Treten nur endlich viele Eigenwerte des einen oder des andern Vorzeichens auf, so ist bei der Aufsuchung derselben an der betreffenden Stelle abzubrechen, was keiner weiteren Ausführungen bedarf.

Auch im Falle der unsymmetrischen Integralgleichung (1) liefert die jetzige Methode gegenüber § 2 eine Vereinfachung und Vertiefung. Es genügt hier ein kurzer Hinweis unter Benutzung der dortigen Bezeichnungen. Im Falle I mögen die  $\varrho_n$  und  $c_n$  so beschaffen sein, daß für alle  $n$  die Norm  $c_n^2$  unterhalb der Schranke  $M$  bleibt. Dann gilt für die Differenz  $\varrho_n - \varrho_m = \zeta_{n,m}$  ebenfalls, daß ihre Norm unterhalb einer Schranke  $4M$  bleibt. Ferner ist

$$(23) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \{ \zeta_{n,m}(s) - \int K(s, t) \zeta_{n,m}(t) dt \} = 0,$$

und daher erzeugen die  $\zeta_{n,m}$  nach unserem Hilfssatz eine glatte Funktionenfolge beschränkter Dimensionenzahl  $r$ , welche eine Grenzschar mit den orthogonalen Komponenten  $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$  definieren möge, sofern nicht  $r=0$ , also  $\zeta_{n,m} \Rightarrow 0$  ist. Im letzteren Falle  $r=0$  konvergieren einfach die  $\varrho_n(s)$  gleichmäßig gegen eine Lösung von (1). Im Falle  $r>0$  sind die  $\psi_i(s)$  Lösungen der homogenen Gleichung. Wir ersetzen  $\varrho_n$  durch eine Funktion  $\eta_n(s) = \varrho_n(s) + x_1 \psi_1(s) + \dots + x_r \psi_r(s)$ , welche orthogonal zu  $\psi_1, \dots, \psi_r$  ist. Für diese Funktionen gilt sicherlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(s) - \int K(s, t) \eta_n(t) dt = f(s) = 0.$$

Wir können dann auf die Differenzen  $\eta_n - \eta_m = \zeta_{n,m}$  wieder unseren Hilfssatz anwenden und leicht schließen, daß die Dimensionenzahl dieser Folge Null sein muß, daß also die  $\eta_n$  gleichmäßig gegen eine zu den  $\psi_i(s)$  orthogonale Lösung von (1) konvergieren.

Im Falle II erhalten wir ebenfalls auf Grund unseres Hilfssatzes als Grenzgebilde der Funktionenfolge  $\sigma_n(s) = \frac{\varrho_n(s)}{c_n}$  eine lineare Funktionenschar von Lösungen der homogenen Integralgleichung.

Auf diese Art ergibt sich nach unserer Methode ein genauerer Einblick in die Natur der hier waltenden Konvergenzverhältnisse.

## § 6.

## Stetigkeitsfragen.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen enthalten implizit auch eine vollständige Beantwortung der Frage, inwieweit sich die Lösungen eines Integralgleichungsproblems mit dem Kern stetig ändern. Wir begnügen uns hier mit der Ausführung für das Eigenwertproblem bei einem symmetrischen Kern  $K$ . Der Kern  $K(s, t)$  möge der gleichmäßige Limes anderer symmetrischer Kerne  $K_n(s, t)$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sein. Wenn wir uns auf die Funktionen  $\varphi$  beschränken, welche der Bedingung (8) genügen, so unterscheiden sich die Werte der zu den Kernen gehörigen Integralformen  $J_n[\varphi, \varphi]$  und  $J[\varphi, \varphi]$  bei hinreichend großem  $n$  beliebig wenig. Daher gilt dies auch für die Minima oder Maxima dieser Kerne unter den Nebenbedingungen (8), (9), und ebenso für die Maxima der Minima oder die Minima der Maxima. Mit anderen Worten: *Der  $h$ -te positive und der  $h$ -te negative Eigenwert ändert sich stetig mit dem Kern.* Hinsichtlich der Eigenfunktionen können wir mit Rücksicht auf das bei ihnen willkürliche Vorzeichen und das Auftreten mehrfacher Eigenfunktionen eine regelrechte Stetigkeit nicht erwarten. Dafür tritt hier folgendes Verhalten auf: *Es sei  $\lambda_h$  ein  $r$ -facher Eigenwert des Kernes  $K(s, t)$ , es sei also  $\lambda_h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_h^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{h+1}^{(n)} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{h+r-1}^{(n)}$ , dagegen gelte diese Relation nicht für  $\lambda_{h-1}^{(n)}$  und  $\lambda_{h+r}^{(n)}$ . Dann konvergiert mit wachsendem  $n$  die lineare Schar aus den Eigenfunktionen  $\psi_h^{(n)}, \dots, \psi_{h+r-1}^{(n)}$  des Kernes  $K_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen die lineare Schar der Eigenfunktionen von  $K$  für den Eigenwert  $\lambda_h$ .*

Diesen Satz, welcher ein vollständiger Ausdruck der fraglichen Stetigkeitseigenschaften der Eigenfunktionen ist, beweist man auf Grund unseres Hilfssatzes fast unmittelbar aus der Bemerkung, daß für die Eigenfunktionen  $\psi_{h+k}^{(n)}$  ( $0 \leq k < r$ ) die Limesgleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \psi_{h+k}^{(n)}(s) - \lambda_h \int K(s, t) \psi_{h+k}^{(n)}(t) dt \right\} = 0$$

besteht.

**Schlußbemerkung.**

Die Ausführungen dieser Arbeit treffen natürlich nicht nur den hier der Bequemlichkeit halber vorausgesetzten Fall stetiger Kerne; vielmehr gelten sie auch im allgemeinsten prinzipiell zugänglichen Falle, bei dem nur folgende Voraussetzungen erfüllt zu sein brauchen: Alle auftretenden Funktionen sind im Lebesgueschen Sinne integrierbar; insbesondere existieren auch die Integrale  $\int K(s, t)^2 ds$  und  $\int K(s, t)^2 dt$  in diesem Sinne und liegen unterhalb fester Schranken. Alle Integrale sind dabei nach Lebesgue zu verstehen, alle Funktionen nur bis auf Nullmengen definiert.

Auf weitere Anwendungen der hier dargelegten Begriffsbildungen hoffe ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen zu können.

(Eingegangen am 17. 1. 1923.)



## Analytische Fortsetzung und konvexe Kurven\*).

Von

Georg Pólya in Zürich.

Ich beabsichtige eine zusammenfassende Übersicht über einige neuere funktionentheoretische Untersuchungen zu geben. Sie rühren von vielen Autoren her, unter denen besonders Borel, Le Roy, Phragmén, Lindelöf und Carlson hervorzuheben sind. Sie betreffen insbesondere drei Gegenstände: die geradlinige Annäherung an wesentlich singuläre Punkte von einem bestimmten Typus, die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer Funktionen und die analytische Fortsetzung eines durch seine Potenzreihenentwicklung definierten Funktionselementes. Diese drei Gegenstände hängen eng miteinander zusammen. Der Zusammenhang tritt bei der Verwendung einer geeigneten graphischen Darstellung der funktionentheoretischen Verhältnisse besonders plastisch hervor. Für mich ist diese graphische Darstellung die Hauptsache, sie wird sozusagen das Rückgrat meines Berichtes bilden. Der Gegenstand verlockt übrigens sowohl durch die Tragweite der Resultate, wie durch die Fülle pikanter Einzelheiten zu breiten Ausführungen. Ich will aber sowohl Einzelheiten wie Allgemeinheiten der Hauptsache zum Opfer bringen, auch einige neue Resultate unterdrücken, und mich in allen Ausführungen an den wesentlichsten und deutlichsten Spezialfall halten.

### 1. Annäherung an eine singuläre Stelle.

Es sei die zu betrachtende singuläre Stelle in den Punkt  $z = \infty$  verlegt. In dieser Annahme liegt keinerlei Beschränkung. Es sei ferner angenommen, daß der Punkt  $\infty$  die einzige singuläre Stelle der betrachteten Funktion  $F(z)$  ist; m. a. W. es sei  $F(z)$  eine ganze Funktion. In dieser Annahme liegt eine gewisse Beschränkung, aber keine sehr einschnärende. Es sei aber vorausgesetzt — und hierdurch wird nun die Frage sehr

\*) Bericht, erstattet dem Kongreß zu Leipzig, den 21. September 1922.

stark eingeengt —, daß die Funktion  $F(z)$  in der ganzen Ebene einer Ungleichung von der Form

$$(1) \quad |F(z)| < A e^{a|z|}$$

genügt ( $A > 0$ ,  $a > 0$ ,  $A, a$  Konstanten).  $F(z)$  ist also eine ganze Funktion der Ordnung 1 vom Normaltypus, oder auch von langsamerem Anwachsen, in der bekannten Pringsheimschen Terminologie gesprochen. Ich will mich kürzer ausdrücken. Eine ganze Funktion, die einer Ungleichung von der Form (1) genügt, soll vom *Exponentialtypus* heißen. Die einfachste ganze Funktion vom Exponentialtypus ist eben die Funktion  $e^z$ .

Nähern wir uns dem singulären Punkt von  $F(z)$ , dem Punkt  $z = \infty$ , entlang verschiedener Wege, so wird  $F(z)$  im allgemeinen längs jedes Weges anders anwachsen. Konzentrieren wir uns auch jetzt auf den einfachsten Fall. Die verschiedenen Wege seien Halbstrahlen, die von einem gemeinsamen Anfangspunkt, z. B. von dem Punkt  $z = 0$  auslaufen. Betrachten wir den Halbstrahl der Richtung  $\varphi$  und bilden wir mit Phragmén und Lindelöf<sup>1)</sup> den Ausdruck

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \lg |F(r e^{i\varphi})| = h(\varphi).$$

$h(\varphi)$  ist eine Funktion des variablen Winkels  $\varphi$ .  $h(\varphi)$  gibt uns an, wie das Anwachsen von  $F(z)$  entlang des Halbstrahls von der Richtung des Halbstrahls abhängt. Man kann  $h(\varphi)$  als den *Indikator* der Funktion  $F(z)$  bezeichnen.

$h(\varphi)$  ist eine reelle Funktion von der Periode  $2\pi$ ; ihr Verlauf ist nicht willkürlich, sondern durch folgende Ungleichung reguliert, die von Phragmén und Lindelöf<sup>1)</sup> ermittelt worden ist: es ist

$$(3) \quad h(\varphi_2) \leq \frac{h(\varphi_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + h(\varphi_3) \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_1)},$$

wenn

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_1 + \pi.$$

Die Ungleichung (3) kann durch eine geometrische Aussage ersetzt werden<sup>2)</sup>:  $h(\varphi)$  ist die *Stützfunktion* eines ganz im Endlichen gelegenen

<sup>1)</sup> Phragmén, E. und Lindelöf, E.: Acta Math. 31 (1908), S. 381–406. Hier und im folgenden sei für ausführlichere Zitate auf Bieberbach, L.: Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Enzyklopädie II 3, verwiesen.

<sup>2)</sup> Vgl. Blaschke, W.: Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. 23 (1914), S. 210–234, insbesondere S. 222, Anmerkung \*); Rademacher, H.: Math. Zeitschrift 13 (1922), S. 18–27.

*konvexen Bereiches.* Der Rand dieses konvexen Bereiches ist, als Enveloppe der Geraden

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - h(\varphi) = 0,$$

durch den Indikator  $h(\varphi)$ , also durch die ganze Funktion  $F(z)$  vom Exponentialtypus vollständig bestimmt. Es gehört somit zu jedem derartigen  $F(z)$  ein in der komplexen Zahlenebene gelegener, nach Lage und Gestalt wohlbestimmter konvexer Bereich, das *Indikatordiagramm* von  $F(z)$ , wie ich es fortan nennen will.

Als Beispiel diene die „Exponentialsumme“

$$(4) \quad A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z} + \dots + A_l e^{a_l z}$$

(eine Summe von endlich vielen Exponentialfunktionen;  $A_1, A_2, \dots, A_l$  sind nicht verschwindende,  $a_1, a_2, \dots, a_l$  voneinander verschiedene Konstanten). Man zeichne das kleinste Polygon, das die in der komplexen Zahlenebene gelegenen Punkte  $a_1, a_2, \dots, a_l$  umfaßt. Nicht etwa dieses Polygon, sondern sein Spiegelbild in bezug auf die reelle Achse ist das Indikatordiagramm von  $F(z)$ . Z. B. ist das Indikatordiagramm der Funktion

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

die Verbindungsstrecke der beiden Punkte  $-i$  und  $+i$ . Verschiedene Eigenschaften des Indikators  $h(\varphi)$ , die bei rein analytischer Betrachtung nicht eben leicht faßbar sind, können aus der gegebenen graphischen Darstellung unmittelbar abgelesen werden. Ich darf aber nicht bei diesem Gegenstand verweilen.

## 2. Verteilung der Nullstellen.

Es sei  $F(z)$  eine ganze Funktion vom Exponentialtypus. Die Anzahl ihrer Nullstellen im Kreise  $|z| \leq r$  sei mit  $N(r)$  bezeichnet. Wenn der Grenzwert

$$(5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r}$$

existiert, so soll er als die *Dichtigkeit* der Nullstellen von  $F(z)$  bezeichnet werden. Im allgemeinen existiert aber der Grenzwert (5) nicht, und dann sind

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r} \quad \text{und} \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r}$$

voneinander verschieden. Diese beiden Größen sollen bzw. als *untere Dichtigkeit* und *obere Dichtigkeit* der Nullstellen bezeichnet werden. (In unserem Fall ganzer Funktionen vom Exponentialtypus sind diese Dichtigkeiten endlich.) Untere und obere Dichtigkeit besitzen denselben Wert, wenn der Grenzwert (5) existiert.

Die Gestalt des Indikatordiagramms hängt mit der Verteilung der Nullstellen aufs engste zusammen. Die einfachste hierher gehörige Tatsache, eine unmittelbare Folge der Jensenschen Gleichung, ist die folgende:

I. *Die untere Dichtigkeit der Nullstellen ist nicht größer als der Umfang des Indikatordiagramms, dividiert durch  $2\pi$ .*

Beispiel. Die Nullstellen von  $\sin z$  besitzen eine bestimmte Dichtigkeit

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2 \left[ \frac{r}{\pi} \right] + 1}{r} = \frac{2}{\pi}.$$

Für das Indikatordiagramm von  $\sin z$  gilt

$$\frac{\text{Umfang}}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

D. h. in der durch Satz I statuierten Ungleichung ist für die Funktion  $\sin z$  das Gleichheitszeichen erreicht.

II. *Die untere Dichtigkeit der Nullstellen, die auf einen Halbstrahl aufgereiht sind, ist nicht größer als die Breite des Indikatordiagramms, in der zum besagten Halbstrahl senkrechten Richtung, dividiert durch  $2\pi$ .*

Bezeichnen wir mit  $N_{\varphi}(r)$  die Anzahl der Nullstellen auf der geradlinigen Verbindungsstrecke der beiden Punkte 0 und  $re^{i\varphi}$ , so ist Satz II mit der folgenden Formel äquivalent:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{\varphi}(r)}{r} \leq \frac{h\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + h\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{2\pi}.$$

Beispiel. Die Dichtigkeit der Nullstellen von  $\sin z$  auf der positiven reellen Achse ist  $\frac{1}{\pi}$ ; die Breite des Indikatordiagramms von  $\sin z$  senkrecht zu der positiven reellen Achse ist 2. Es ist  $\frac{1}{\pi} = \frac{2}{2\pi}$ . Ebenso wird auch für die negative reelle Achse in der durch Satz II statuierten Ungleichung das Zeichen = erreicht. Für die positive und negative imaginäre Achse gilt auch das Zeichen =, weil sowohl die fragliche Dichtigkeit, wie die fragliche Breite = 0 sind. Abgesehen von den vier erwähnten, gilt für alle Halbstrahlen das Zeichen <, weil die fragliche Dichtigkeit = 0 und die fragliche Breite > 0 ist.

Satz II ist Spezialfall einer Nevanlinnaschen Verallgemeinerung<sup>a)</sup> eines Carlsonschen Satzes<sup>b)</sup>.

<sup>a)</sup> Nevanlinna, R.: C. R. Paris 174 (1922, 1), S. 1325–1327.

<sup>b)</sup> Carlson, F.: Sur une classe de séries de Taylor, Dissertation Upsala 1914.

Um weiter zu gelangen, müssen wir auf die Struktur der Nullstellenverteilung näher eingehen. Diese Struktur kommt in den Werten der unteren und der oberen Dichtigkeit noch nicht genügend zum Ausdruck. Um Genaueres zu erfahren, bilden wir den Quotienten

$$(6) \quad \frac{N(n) - N(m)}{n - m},$$

$m, n$  sind ganze Zahlen,  $n > m \geq 0$ . Der Quotient stellt die Dichtigkeit im Intervall  $m, n$  dar. Betrachten wir sämtliche Intervalle, deren Länge nicht zu klein ist im Vergleich zur Entfernung des Mittelpunktes vom Nullpunkt. D. h. es sei gegeben  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , und das Zahlenpaar  $m, n$  sei der Bedingung

$$(7) \quad n - m \geq \alpha \frac{m+n}{2}$$

unterworfen. Sämtliche Quotienten (6), in welchen  $m$  und  $n$  der Bedingung (7) genügen, bilden eine abzählbare Menge rationaler Zahlen. Die kleinste Häufungsstelle dieser Zahlenmenge heiße  $d(\alpha)$ . Z. B. ist für  $\alpha = 2$  notwendigerweise  $m = 0$  und folglich ist  $d(2)$  die untere Dichtigkeit. Wenn  $\alpha$  abnimmt, so werden immer mehr und mehr Zahlenpaare  $m, n$  durch (7) zugelassen, und folglich nimmt  $d(\alpha)$  auch ab, oder es bleibt konstant. Es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{\alpha=0} d(\alpha) = d_0.$$

$d_0$  soll als *Minimaldichtigkeit* bezeichnet werden. Es ist  $d_0 \leq d(2)$ , die Minimaldichtigkeit nie größer als die untere Dichtigkeit. Existiert eine bestimmte Dichtigkeit, d. h. der Grenzwert (5), so fällt die Minimaldichtigkeit mit ihr zusammen.

III. Die Minimaldichtigkeit der Nullstellen, die auf einen Halbstrahl aufgereiht sind, ist nicht größer als die Länge desjenigen geradlinigen Begrenzungsstückes des Indikator-Diagramms, dessen äußere Normale dem fraglichen Halbstrahl parallel ist, dividiert durch  $2\pi$ .

Satz III ist so zu verstehen, daß die fragliche Minimaldichtigkeit = 0 ist, wenn das entsprechende geradlinige Begrenzungsstück die Länge 0 besitzt. Daß die Länge = 0 ist, würde man gewöhnlich lieber so ausdrücken, daß ein entsprechendes geradliniges Begrenzungsstück überhaupt nicht existiert. — Beispiel: für  $\sin z$  geht die durch Satz III statuierte Ungleichung für jeden Halbstrahl in eine Gleichung über.

Es sei bemerkt, daß die ausgesprochenen Sätze, zum Teil mit sinn-gemäßen Änderungen, für viel allgemeinere Funktionenklassen gelten, als die ganzen Funktionen vom Exponentialtypus. Aber selbst in aller heute erreichbaren Allgemeinheit bilden diese Sätze wohl nur Bruchstücke ge-

nauerer Beziehungen zwischen Nullstellenverteilung und Indikator-Diagramm. Hingegen können diese Beziehungen ziemlich erschöpfend erforscht werden, wenn man sich auf die sehr spezielle Funktionenklasse beschränkt, die die Exponentialsummen von der Form (4) umfaßt<sup>6)</sup>.

### 3. Analytische Fortsetzung.

Die Potenzreihe

$$(8) \quad a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \dots = F(z)$$

stellt dann und nur dann eine ganze Funktion vom Exponentialtypus dar, wenn die Potenzreihe

$$(9) \quad \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots = f(z)$$

in einer nicht verschwindenden Umgebung des Punktes  $\infty$  konvergiert. Der Übergang von (8) zu (9) ist eine *Funktionaloperation*, eine eindeutige Abbildung der Gesamtheit der ganzen Funktionen vom Exponentialtypus auf die Gesamtheit der in einer Umgebung von  $z = \infty$  regulären, im Punkte  $z = \infty$  selbst verschwindenden Funktionselemente. Mit Borel<sup>6)</sup> müßte man sagen,  $F(z)$  ist die „fonction entière associée“ von  $\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)$ . Ich will  $f(z)$  die *Borelsche Transformierte* von  $F(z)$  nennen, in Formeln

$$(10) \quad \mathfrak{B}F(z) = \frac{F(0)}{z} + \frac{F'(0)}{z^2} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{z^{n+1}} + \dots$$

Als *Carlsonsche Transformierte* will ich die Reihe

$$(11) \quad \mathfrak{C}F(z) = F(0) + F(1)e^{-z} + \dots + F(n)e^{-nz} + \dots,$$

als *Dirichletsche Transformierte* die Reihe

$$(12) \quad \mathfrak{D}F(z) = \frac{F(\lg 1)}{1^{1+z}} + \frac{F(\lg 2)}{2^{1+z}} + \dots + \frac{F(\lg n)}{n^{1+z}} + \dots$$

bezeichnen.  $\mathfrak{D}F(z)$  ist eine Dirichletsche Reihe. Man könnte leicht  $\mathfrak{B}F(z)$  und  $\mathfrak{D}F(z)$  durch Variablenvertauschung in eine gewöhnliche Taylorreihe transformieren, aber diese Transformation würde die Einfachheit der funktionentheoretischen Zusammenhänge aufheben.

Um einen Anhaltspunkt zu gewinnen, berechnen wir die  $\mathfrak{B}$ -,  $\mathfrak{C}$ - und  $\mathfrak{D}$ -Transformierte der Exponentialsumme

$$(4') \quad A_1 e^{a_1 z} + A_2 e^{a_2 z} + \dots + A_i e^{a_i z} = \sum A e^{a z}.$$

<sup>5)</sup> Pólya, G.: Münchener Berichte 1920, S. 285–290.

<sup>6)</sup> Borel, E.: Leçons sur les séries divergentes (Paris 1901), insbes. Chap. IV.

Man findet

$$\mathfrak{B} \Sigma A e^{az} = \sum_{z=a} A,$$

$$\mathfrak{C} \Sigma A e^{az} = \sum \frac{A}{1-e^{a-z}} = \sum \frac{A}{z-a+\dots},$$

$$\mathfrak{D} \Sigma A e^{az} = \sum A \zeta(z-a+1) = \sum A \left( \frac{1}{z-a} + \dots \right).$$

Denken wir uns die in der Exponentialsumme (4') auftretenden Konstanten  $A_1, A_2, \dots, A_i, a_1, a_2, \dots, a_i$  variiert, aber derart, daß das Indikator-Diagramm der Exponentialsumme *fest bleibt*. Wir sehen dann, daß in dem vorliegenden Spezialfall eine bestimmte Beziehung zwischen dem Indikator-Diagramm von  $F(z)$  und der Lage der Singularitäten seiner  $\mathfrak{B}$ -,  $\mathfrak{C}$ - und  $\mathfrak{D}$ -Transformierten besteht. Erheben wir uns zum allgemeinen Fall, so gewinnen wir folgende Theoreme:

I. Das Funktionselement  $\mathfrak{B} F(z)$  läßt sich vom Punkt  $z = \infty$  aus in jeden Punkt fortsetzen, der außerhalb des konvexen Bereiches liegt, der aus dem Indikator-Diagramm von  $F(z)$  durch Spiegelung an der reellen Achse entsteht. Hingegen ist jeder Randpunkt des gespiegelten<sup>7)</sup> Indikator-Diagramms ein singulärer Punkt für das Funktionselement  $\mathfrak{B} F(z)$ , abgesehen eventuell von solchen, die im Innern eines geradlinigen Begrenzungsstückes liegen. Ist das Indikator-Diagramm ein Polygon, wie in unserem Beispiel (4'), so ist jeder Eckpunkt seines Spiegelbildes ein singulärer Punkt, aber sonst vielleicht kein einziger Randpunkt.

Der ausgesprochene Satz ist nur eine neue, von Konvergenzfragen, die doch nicht hierher gehören, ungestörte Form des bekannten Borelschen Resultates<sup>6)</sup>, betreffend den Zusammenhang zwischen Singularitäten und Summationspolygon. Das Indikator-Diagramm von  $F(z)$  ist mit dem von Borel betrachteten konvexen Summationsbereich der Reihe

$$\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right) = F'(0) + F'(0)z + F''(0)z^2 + \dots$$

nicht etwa identisch, sondern geht daraus durch eine einfache geometrische Transformation hervor. Wenn der Punkt  $z = 0$  sich im Innern des Indikator-Diagramms befindet, so ist diese Transformation eine Transformation mittels reziproker Polaren in bezug auf den Einheitskreis.

III. Die Fortsetzung von  $\mathfrak{D} F(z)$  ist regulär und eindeutig in dem zweifach zusammenhängenden Bereich, der zwischen dem gespiegelten Indikator-Diagramm und dem Punkt  $z = \infty$  liegt. Abgesehen eventuell von

<sup>7)</sup> Das heißt, an der reellen Achse gespiegelten Diagramms. Diese Abkürzung soll fortan stets benutzt werden.



den inneren Punkten geradliniger Begrenzungsstücke ist jeder Randpunkt des gespiegelten Indikator-Diagramms für  $\Re F(z)$  singulär.

Es ist nämlich  $\Re F(z) - \Im F(z)$  eine ganze Funktion.

II. Betreffend  $\Im F(z)$  kommen wir zum einfachsten Resultat, wenn wir voraussetzen, daß die Breite des Indikator-Diagramms von  $F(z)$  in vertikaler Richtung  $< 2\pi$  ist. [ $\Im F(z)$  hat die Periode  $2\pi i$ .] Betrachten wir den zweifach zusammenhängenden Bereich, der außerhalb des gespiegelten Indikator-Diagramms von  $F(z)$  und innerhalb eines gewissen, das gespiegelte Indikator-Diagramm ganz einschließenden Horizontalstreifens von der Breite  $2\pi$  liegt. In diesem Bereich ist  $\Im F(z)$  regulär und eindeutig, aber jeder Punkt des inneren Randes (wieder abgesehen von Innenpunkten geradliniger Begrenzungsstücke) ist für  $\Im F(z)$  singulär. Es ist nämlich  $\Im F(z) - \Re F(z)$  innerhalb des vollen erwähnten Parallelstreifens regulär. Die aus  $\Im F(z)$  durch Variablenvertauschung entstehende Potenzreihe

$$F(0) + F(1)w + F(2)w^2 + \dots$$

ist regulär in einem einfach zusammenhängenden, mittels der konformen Abbildung  $w = e^{-z}$  zu bestimmenden Bereich, der die Punkte  $w = 0$  und  $w = \infty$  enthält, und insbesondere  $= 0$  für  $w = \infty$ . Das ausgesprochene Resultat geht nur unbedeutend über einen Satz von Carlson hinaus<sup>4)</sup>. Den einfachsten Spezialfall, in dem das Indikator-Diagramm sich auf einen einzigen Punkt reduziert, haben schon Leau, Wigert und Faber<sup>5)</sup> behandelt. Von den vielen Vorarbeiten, die in der grundlegenden Untersuchung von Carlson<sup>4)</sup> zusammengefaßt werden, müssen einerseits die von Le Roy und Lindelöf, andererseits die von Pincherle, Oseen und Svensson hervorgehoben werden.

Es ist zwischen den ausgesprochenen Sätzen I, II, III ein großer Unterschied. Die Sätze betreffend  $\Re F(z)$  und  $\Im F(z)$  lassen sich umkehren. Jede Reihe von der Form

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots$$

mit nicht verschwindendem Konvergenzgebiet läßt sich als  $\Re$ -Transformierte einer und nur einer, jede Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 e^{-z} + a_2 e^{-2z} + \dots$$

mit den unter II beschriebenen Eigenschaften läßt sich als  $\Im$ -Transformierte einer und nur einer ganzen Funktion vom Exponentialtypus auf-

<sup>4)</sup> Leau: Journal de Mathématiques (5), 5 (1899), S. 365–425; Wigert, S.: Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. 57 (1900), S. 1001–1011; Faber, G.: Math. Annalen 57 (1903), S. 369–388.



fassen; im letzteren Fall soll die vertikale Breite des Indikatordiagramms  $< 2\pi$  sein und es wird von einem Faktor  $e^{2\pi iz}$  abgesehen. Der Satz betreffend  $\mathfrak{D}F(z)$  läßt sich hingegen *nicht* in diesem Sinne umkehren, wie Beispiele es zeigen;  $\mathfrak{D}F(z)$  ist eine Dirichletsche Reihe und deren Eigenschaften sind auch in dieser Hinsicht verwickelter als die Eigenschaften der Potenzreihen, was die anderen beiden Reihen im wesentlichen sind.

Es sei erwähnt, daß die Funktionaloperationen  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  nicht bloß für ganze Funktionen vom Exponentialtypus, sondern für ein ausgedehnteres Feld von Funktionen erklärt werden können. Man gelangt auf diese Art zu transformierten Reihen, die außerhalb gewisser, sich ins Unendliche erstreckender konvexer Bereiche regulär sind. Die allgemeine Behandlung erfordert die von Lindelöf<sup>9)</sup> ausgebildeten Methoden der Residuenrechnung. Sie kann am besten auf eine der Fourierschen Integralformel analoge Umkehrformel gegründet werden. Zur Behandlung des hier ausführlich erläuterten Spezialfalles reicht auch die Methode der Reihenentwicklungen hin, wie sie besonders durch Pringsheim<sup>10)</sup> ausgebildet worden ist.

#### 4. Verschiedene Folgerungen.

Der geschilderte Zusammenhang eröffnet uns einen Weg, um aus jedem Satz betreffend das Verhalten in der Umgebung einer singulären Stelle von einem gewissen Typus zu einem entsprechenden Satz über die analytische Fortsetzung von Potenzreihen überzugehen, und umgekehrt. Dieser Weg ist wohl schon öfters betreten, aber noch kaum mit der wünschenswerten Konsequenz verfolgt worden, obzwar er, wie es scheint, in seinem weiteren Verlaufe nach recht amüsanten Gegenden und zu hübschen Ausblicken führt. Einige Beispiele sollen die allgemeine Richtung erläutern.

Wir stellen uns zuerst irgendeine leicht beantwortbare Frage über ganze Funktionen vom Exponentialtypus. Z. B. es sollen die Indikator-Diagramme von zwei solchen Funktionen  $F(z)$  und  $G(z)$  gezeichnet vorliegen; was läßt sich dann über das Indikator-Diagramm von  $F(z)G(z)$  aussagen? Ist  $h(\varphi)$  der Indikator von  $F(z)$ ,  $k(\varphi)$  der von  $G(z)$ , so ist der Indikator von  $F(z)G(z)$  sicherlich  $\leq h(\varphi) + k(\varphi)$ . Die Summe  $h(\varphi) + k(\varphi)$  ist wieder eine Stützfunktion, und zwar ergibt sich der zugehörige konvexe Bereich durch eine seit den Arbeiten von Brunn und Minkowski geläufig gewordene Konstruktion. Es soll  $\alpha$  eine beliebige, durch einen Punkt in der Fläche des Indikator-Diagramms von  $F(z)$  dargestellte komplexe Zahl bedeuten, und  $\beta$  soll dieselbe Bedeutung in bezug auf das Diagramm von  $G(z)$  haben. Die Gesamtheit der Zahlen  $\alpha + \beta$  erfüllt einen konvexen Bereich, dessen Stützfunktion  $h(\varphi) + k(\varphi)$  ist.

<sup>9)</sup> Lindelöf, E.: Calcul des résidus, Paris 1905.

<sup>10)</sup> Pringsheim, A.: Münchener Berichte 1912, S. 11–92.

Dieser durch Addition entstandene Bereich umfaßt also das Indikator-Diagramm von  $F(z)G(z)$  entweder als echten Teil, oder ist mit ihm identisch. (Beide Fälle können tatsächlich vorkommen.) Das ist ein Sachverhalt über ganze Funktionen; was bedeutet er für Potenzreihen?

Ist

$$\mathfrak{B} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}, \quad \mathfrak{B} G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n-1},$$

$$\mathfrak{E} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-nz}, \quad \mathfrak{E} G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-nz},$$

so ist

$$(13) \quad \mathfrak{B} F(z)G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 \right) z^{-n-1},$$

$$(14) \quad \mathfrak{E} F(z)G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n e^{-nz}.$$

Die bei direkter Fortsetzung anzutreffenden Singularitäten der Reihen  $\mathfrak{B} F(z)$  und  $\mathfrak{E} F(z)$  sind in einem gewissen konvexen Bereich enthalten (im gespiegelten Indikator-Diagramm von  $F(z)$ ), die der Reihen  $\mathfrak{B} G(z)$  und  $\mathfrak{E} G(z)$  in einem anderen. Die Singularitäten der Reihen  $\mathfrak{B} F(z)G(z)$  und  $\mathfrak{E} F(z)G(z)$  sind enthalten in einem konvexen Bereich, der durch *Addition* der beiden erwähnten Bereiche entsteht; wir haben ein Theorem über die *Addition der Singularitäten* erhalten. Durch Variablenvertauschung  $e^{-z}|z$  geht das Theorem für die Reihe (14) in ein solches über die *Multiplikation* der Singularitäten über. Wir sind so zu den wohlbekannten Sätzen von Hadamard und Hurwitz über Multiplikation und Addition der Singularitäten geführt worden<sup>11)</sup>.

Gehen wir, umgekehrt, von irgendeinem bekannten Satz aus, der sich auf Potenzreihen bezieht, so gelangen wir, dank den erwähnten Zusammenhängen, zu neuen Sätzen, die sich auf ganze Funktionen vom Exponentialtypus beziehen. Hier haben wir noch mehr Auswahl, denn über Potenzreihen sind viel mehr und viel verstecktere Tatsachen bekannt. So z. B. die Sätze über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. Es seien  $g_0, g_1, g_2, \dots$  ganze rationale Zahlen. Wir fassen die Potenzreihe

$$(15) \quad \frac{g_0}{z} + \frac{g_1}{z^2} + \frac{g_2}{z^3} + \dots$$

als die  $\mathfrak{B}$ -Transformierte der ganzen Funktion

$$(16) \quad g_0 + \frac{g_1}{1!} z + \frac{g_2}{2!} z^2 + \dots$$

auf. (Man könnte Reihen von der Form (15) „ganzzahlig“ nennen;

<sup>11)</sup> Vgl. Hadamard, J.: *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Paris 1901, insbesondere S. 69–73.

Hurwitz<sup>12)</sup> hat die Reihen von der Form (16) als „ganzzahlig“ bezeichnet.) Wenn (16) eine ganze Funktion darstellt, und ihr Indikator-Diagramm im Innern des Einheitskreises  $|z| < 1$  enthalten ist, so besteht dies Diagramm aus dem einzigen Punkt  $z = 0$ , und (16) bricht ab, reduziert sich auf ein Polynom. Diese Aussage ist trivial<sup>13)</sup>; sie ist die Übertragung der Tatsache, daß die Potenzreihe (15) mit den ganzzahligen Koeffizienten  $g_n$  nur im Äußeren des Einheitskreises konvergieren kann, wenn sie unendlich viele von Null verschiedene Koeffizienten enthält. Wenn das Diagramm von (16) im abgeschlossenen Einheitskreise  $|z| \leq 1$  liegt, so sind zwei Fälle möglich: entweder füllt es den abgeschlossenen Einheitskreis vollständig aus, oder ist die Summe der Reihe (16) von der Form

$$(17) \quad P_1(z)e^{a_1 z} + P_2(z)e^{a_2 z} + \dots + P_l(z)e^{a_l z},$$

worin  $P_1(z), P_2(z), \dots, P_l(z)$  rationale ganze Funktionen und  $a_1, a_2, \dots, a_l$  algebraische ganze Zahlen bedeuten. Die Rolle des Einheitskreises in dieser Betrachtung kann übrigens irgendeine konvexe Punktmenge übernehmen, deren einfach zusammenhängendes Äußere, auf das Äußere des Einheitskreises mit Entsprechen der unendlich fernen Punkte konform abgebildet, eine Abbildung erfährt, deren Ähnlichkeitsverhältnis im Unendlichen 1:1 ist. Die ganzen Funktionen von der Form (17) sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre  $\mathfrak{B}$ -Transformierten rationale Funktionen sind, und zwar solche von der Form (15) mit ganzzahligen Entwicklungskoeffizienten (falls  $P_1(z), \dots, P_l(z), a_1, \dots, a_l$  richtig zusammenpassen; dieser Punkt ist leicht zu präzisieren). Unter den Potenzreihen mit ganzzahligen Entwicklungskoeffizienten sind nämlich diejenigen ausgezeichnet, deren Summe eine rationale Funktion ist<sup>14)</sup>. Fassen wir die Reihe

$$(18) \quad g_0 + g_1 e^{-z} + g_2 e^{-2z} + \dots$$

mit ganzzahligen Koeffizienten  $g_0, g_1, g_2, \dots$  als  $\mathfrak{U}$ -Transformierte einer ganzen Funktion  $F(z)$  auf, so ist  $F(z)$  ganzwertig, d. h. die Werte  $F(0), F(1), \dots, F(n), \dots$  sind rationale ganze Zahlen (nämlich bzw.  $= g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ ). Ausgezeichnet sind hier diejenigen ganzen Funktionen, deren  $\mathfrak{U}$ -Transformierte eine rationale Funktion von  $e^{-z}$  ist mit ganzzahligen Entwicklungskoeffizienten in der Entwicklung. Diese sind von der Form

$$(19) \quad P_1(z)a_1^z + P_2(z)a_2^z + \dots + P_l(z)a_l^z$$

<sup>12)</sup> Hurwitz, A.: Math. Annalen 51 (1898), S. 196–226.

<sup>13)</sup> Etwas hierüber hinausgehend Kakeya, S.: Tôhoku Math. Journal 10 (1916), S. 70–72; Pólya, G.: ebenda 19 (1921), S. 65–68.

<sup>14)</sup> Vgl. auch für weitere Literatur, Carlson, F.: Math. Zeitschrift 9 (1921), S. 1–13, Pólya, G.: Proc. of the London Math. Soc. (2) 21 (1922), S. 22–38.

(die Funktionen  $P_1(z)$  sind rational ganz, die Zahlen  $a_i$  algebraisch ganz; es ist noch verlangt, daß die Breite des Indikator-Diagramms in vertikaler Richtung  $< 2\pi$  sei). Die *kleinste* unter den Funktionen (19) ist  $2^z$  (von Polynomen abgesehen);  $2^z$  ist *überhaupt* die kleinste ganze transzendente Funktion, die für  $z = 0, 1, 2, 3, \dots$  ganze rationale Werte annimmt<sup>15</sup>).

Wir wollen noch an der Hand der gefundenen allgemeinen Zusammenhänge einige geläufige Sätze über Potenzreihen besser verstehen. Den bekannten Fabry'schen Lückensatz will ich so formulieren: Wenn unter den ersten  $n$  Koeffizienten einer im Einheitskreis konvergenten, nicht abbrechenden Potenzreihe

$$(20) \quad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

die Anzahl der verschwindenden asymptotisch  $= n$  ist, so ist der Punkt  $z = -1$  singulär. (Hierin ist in der Tat enthalten, daß der ganze Konvergenzkreis singulär ist, da eine Drehung der Ebene, d. h. die Vertauschung von  $z$  mit  $e^{i\alpha} z$  am Verschwinden der Koeffizienten nichts ändert.) Den Satz von Vivanti setze ich (durch Vertauschung von  $z$  mit  $-z$ ) in folgende Form: Wenn die Koeffizienten der Reihe (20) reell und abwechselnden Vorzeichens sind, so ist der Punkt  $z = -1$  singulär. Worum handelt es sich in beiden Fällen? Um die positiven reellen Nullstellen einer interpolierenden Funktion der Koeffizienten, d. h. einer Funktion  $F(z)$ , von der die Reihe

$$(21) \quad c_0 + c_1 e^{-z} + c_2 e^{-2z} + \dots$$

die  $\mathbb{C}$ -Transformierte ist. Im Fall des Fabry'schen Lückensatzes sind die ganzzahligen Nullstellen, im Fall des Vivanti'schen Satzes, wo doch  $F(z)$  reell angenommen werden kann, die Nullstellen zwischen den konsekutiven ganzen Zahlen im Spiel. Verfolgen wir diese Bemerkung und suchen wir uns den Fall klarzumachen, wo der Punkt  $-1$  nicht singulär ist, sondern der ihn umfassende Regularitätsbogen die Länge  $l$  hat, d. h. daß zwischen den beiden nach links und nach rechts nächstbenachbarten singulären Punkten die Distanz, gemessen an dem Einheitskreis,  $= l$  ist. (Bei Fabry und Vivanti handelt es sich um den Spezialfall  $l = 0$ .) D. h. von der Reihe (21) zu der dazu passenden Funktion  $F(z)$  übergehend, daß deren Indikator-Diagramm von rechts durch ein Geradenstück von der Länge  $2\pi - l$  begrenzt ist. Hieraus folgt aber eine Beschränkung für die Minimaldichtigkeit der reellen positiven Nullstellen von  $F(z)$  gemäß dem Satz III unter 2. und letzten Endes erhalten wir folgende Sätze:

*Der Bruchteil, den der größte Regularitätsbogen am Konvergenzkreis von dem Umfang dieses Kreises ausmacht, ist  $\leq 1 - \text{Minimaldichtigkeit}$*

<sup>15</sup>) Vgl. Pólya, G.: Göttinger Nachr. 1920, S. 1–10. Carlson, F.: Math. Zeitschrift 11 (1921), S. 1–23.

der verschwindenden Koeffizienten. (Verallgemeinerung<sup>16)</sup> des geläufigen Lückensatzes, der der Minimaldichtigkeit 1 entspricht.)

Der Bruchteil, den der Regularitätsbogen um den negativen reellen Punkt des Konvergenzkreises von dem Umfang dieses Kreises ausmacht, ist  $\leq 1 - \text{Minimaldichtigkeit der Vorzeichenwechsel der (als reell vorausgesetzten) Koeffizienten}$ . (Verallgemeinerung<sup>16)</sup> des Vivantischen Satzes, der der Minimaldichtigkeit 1 entspricht.)

Beispiel: Für die Reihe

$$1 + z^p + z^{2p} + z^{3p} + \dots = \frac{1}{1 - z^p}$$

ist die Minimaldichtigkeit der verschwindenden Koeffizienten  $= \frac{p-1}{p}$  = Dichtigkeit in diesem Falle. Die Regularitätsbögen am Konvergenzkreis sind alle  $= \frac{2\pi}{p}$ , d. h. ein  $p$ -tel des Konvergenzkreisumfanges. Es ist

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{p-1}{p},$$

d. h. es ist in der ausgesprochenen Ungleichung das Gleichheitszeichen erreicht.

Im vorliegenden Beispiel liegen auf dem Konvergenzkreis nur Pole; für diesen Fall kann man die Sätze verschärfen; man kann an Stelle von Minimaldichtigkeit *obere Dichtigkeit* sagen. Für den allgemeinen Fall jedoch ist der Begriff der Minimaldichtigkeit unentbehrlich, wie Beispiele von Fabry und Faber<sup>17)</sup> zeigen<sup>18)</sup>.

<sup>16)</sup> Vgl. das Théorème in Nr. 4, S. 77 und den Anfang von Nr. 8, S. 86 in der Arbeit von E. Fabry: Acta Math. 22 (1898), S. 65–87.

<sup>17)</sup> Faber, G.: Münchener Berichte 30 (1906), S. 581–583.

<sup>18)</sup> Durch Einführung des Indikatordiagramms läßt sich ein Satz von H. Cramér [Arkiv för Mat. Astr. och Fys. 13 (1918) Nr. 22] über allgemeine Dirichletsche Reihen so weit verfeinern, daß er die unter 3. erwähnten Sätze II und III umfaßt. — Man kann den Lückensatz noch weiter ausdehnen und folgendes beweisen: Es sei

$$(a) \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = p > 0.$$

Die Maximaldichtigkeit der Folge  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  sei mit  $D$  bezeichnet ( $D \leq p^{-1}$ ). Dann enthält jede an der Konvergenzgeraden der Dirichletschen Reihe

$$(c) \quad c_1 e^{-\lambda_1 z} + c_2 e^{-\lambda_2 z} + \dots + c_n e^{-\lambda_n z} + \dots$$

gelegene abgeschlossene Strecke von der Länge  $2\pi D$  mindestens einen singulären Punkt der Reihe (c). Vgl. eine gleichzeitig erscheinende Mitteilung des Verfassers in den Sitzungsber. d. Preuß. Ak. Berlin. (Anmerkung bei der Korrektur. 14. 11. 22.)

## Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus.

Von

Gustav Doetsch in Halle a. d. S.

Die von F. Bernstein<sup>1)</sup> gefundene Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion  $\vartheta(t) = \vartheta_3(0/i\pi t)$ :

$$\int_0^1 \vartheta(\tau) \vartheta(t - \tau) d\tau - 2t \vartheta(t) + \int_0^1 \vartheta(\tau) d\tau - 1 = 0$$

besitzt eine gewisse Ähnlichkeit mit denjenigen Integralgleichungen, die Volterra<sup>2)</sup> durch einen symbolischen Prozeß aus algebraischen und Differentialgleichungen entstehen läßt, ist aber nicht darunter enthalten. Jedoch haben F. Bernstein und der Verfasser<sup>3)</sup> gezeigt, daß auch die Integralgleichung der Thetafunktion sich auf ähnliche Weise herleiten läßt, wenn der Volterrasche Prozeß in einer gewissen Richtung erweitert wird. Es können nämlich durch eine neue Funktionaloperation, den *verallgemeinerten Volterraprozeß*, aus algebraischen und Differentialgleichungen, deren Lösungen in ein- oder mehrfache Potenzreihen nach beliebigen reellen Exponenten entwickelbar sind, Funktionalgleichungen erzeugt werden, die formal durch ebensolche Reihen befriedigt werden. Diese Funktionalgleichungen brauchen keine Integralgleichungen zu sein; sie lassen sich jedoch in dieser Form darstellen, wenn der verallgemeinerte Volterraprozeß zufällig identisch ist mit der Umkehr der Laplacetransformation, und zwar haben sie dann den Typus der Gleichung der Thetafunktion.

<sup>1)</sup> Bernstein, F.: Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 40 (1920), S. 735–747.

<sup>2)</sup> Volterra: Leçons sur les fonctions de lignes. Paris 1913, S. 142, 143; 152, 153.

<sup>3)</sup> Bernstein, F. und Doetsch, G.: Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. III. Note. Dritte Herleitung durch den verallgemeinerten Volterraprozeß und weitere Beispiele. Nachr. v. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1922, Sitz. v. 25. Nov. 1921, S. 32–46..

Vom Standpunkt der Integralgleichungen aus ist an dieser Darstellung der Theorie unbefriedigend, daß nicht von einer *gegebenen Integralgleichung* ausgegangen wird, sondern diese als zufälliges Endergebnis erscheint. Außerdem ergeben sich die Lösungen stets in einer bestimmten *analytischen Form*, nämlich als ein- oder mehrfache Potenzreihen nach reellen Exponenten, so daß also Integralgleichungen, deren Lösungen nicht in diese Form gesetzt werden können, von der Theorie nicht erfaßt werden. Deshalb soll diese im Folgenden von der Seite der Integralgleichungen her und ohne Voraussetzung über die analytische Form der Lösung dargestellt und zugleich auf den Fall der *Integrodifferentialgleichungen* verallgemeinert werden — nun unter Zugrundelegung der *Laplace-Transformation*, wie sich dies für den Spezialfall der Thetafunktion beim Aufsuchen der allgemeinen Lösung<sup>4)</sup> schon als nützlich zeigte. Die frühere Voraussetzung über die Darstellbarkeit der beteiligten Funktionen in Reihenform wird jetzt angemessenerweise abgelöst durch die über die Existenz der Laplace-transformierten, wobei die bereits behandelten Spezialfälle die Notwendigkeit erweisen, jenen Begriff etwas weiter zu fassen, als es für gewöhnlich geschieht.

Der durch die Laplace-Transformation vermittelte Zusammenhang zwischen zwei Funktionsklassen ist schon öfters, besonders eingehend von Pincherle, untersucht worden und spielt in vielen Gebieten der Mathematik eine Rolle, z. B. bei der Untersuchung von Differentialgleichungen in der Nähe singulärer Stellen (Poincaré, Horn u. A.). Die Korrespondenz zwischen Integralgleichungen auf der einen und algebraischen und Differentialgleichungen auf der anderen Seite ist aber nicht die einzige, die dabei von Interesse ist, sondern jener Zusammenhang gestattet auch die Übertragung von anderen Funktionalgleichungen, Transformationsformeln, Additionstheoremen<sup>5)</sup> usw., ferner liefert er Beziehungen zwischen partiellen Differentialgleichungen auf der einen Seite und totalen auf der anderen, wovon in einer späteren Arbeit die Rede sein soll.

Integrodifferentialgleichungen der betrachteten Art treten in der theoretischen Physik, z. B. in der Mechanik und in der Elastizitäts- und Wärmeleitungstheorie, auf.

<sup>4)</sup> Bernstein, F.: Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. II. Note. Allgemeine Lösung. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam; Wis- en Natuurkundige Afdeeling, 27 Nov. 1920, S. 759—765.

<sup>5)</sup> Vgl. Bernstein, F. und Doetsch, G.: Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. IV. Note. Integrale Additionstheoreme. Nachr. v. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1922, Sitz. v. 25. Nov. 1921, S. 47—52. Eine Reihe von Relationen, die sich auf die Thetafunktionen beziehen und von denen einige vom Verfasser auf der Versammlung der deutschen Mathematikervereinigung in Jena 1921 mitgeteilt wurden, wird in einer anderen Arbeit erscheinen.



Als *Beispiele* sollen im letzten Paragraphen einige klassische Integral- und Integrodifferentialgleichungen gelöst werden.

### § 1.

#### Die Faltung und die Laplacetransformation.

Für den Typus der im Folgenden behandelten Integralgleichungen ist die Integralform  $\int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau$  grundlegend, so daß die Funktionen, für welche dieses Integral existiert, diejenigen sein werden, mit denen wir uns zu beschäftigen haben; und zwar zeigt schon die Integralgleichung der Thetafunktion, daß die Fälle der uneigentlichen Integrabilität mit eingeschlossen werden müssen. Es liegt also in der Natur der Sache, zwecks späterer Abkürzung der Redeweise folgende Bezeichnung einzuführen:

Eine reelle oder komplexe Funktion  $F(t)$  der reellen Variablen  $t$  soll als zum *Funktionenbereich*  $J$  gehörig oder kurz als *J-Funktion* bezeichnet werden, wenn

1. sie in einem Intervall  $0 < t \leq T$  definiert ist,
2. sie in jedem Teilintervall  $0 < T_0 \leq t \leq T$  im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar ist,
3. das bis zum Nullpunkt erstreckte uneigentliche Integral ihres absoluten Betrages, d. h.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^T |F(t)| dt,$$

existiert.

Sind  $F_1$  und  $F_2$   $J$ -Funktionen, so existiert in ihrem gemeinsamen Definitionsintervall  $0 < t \leq T$  ihre „*Faltungsfunktion*“

$$F_1 * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau,$$

definiert als

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau$$

und stellt dort eine *stetige* Funktion dar. Um Letzteres zu beweisen, hat man zu zeigen, daß die Differenz

$$\begin{aligned} D(t, \delta) &= F_1 * F_2(t + \delta) - F_1 * F_2(t) \\ &= \int_0^{t+\delta} F_1(\tau) F_2(t + \delta - \tau) d\tau - \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

mit zunächst positivem  $\delta$  absolut beliebig klein wird. Durch Einschaltung zweier Werte  $a$  und  $t-b$  zwischen 0 und  $t$  zerlegt man  $D(t, \delta)$  folgendermaßen:



$$\begin{aligned}
D(t, \delta) &= \int_0^a F_1(\tau) [F_2(t + \delta - \tau) - F_2(t - \tau)] d\tau \\
&+ \int_a^{t-b} F_1(\tau) [F_2(t + \delta - \tau) - F_2(t - \tau)] d\tau \\
&+ \int_{t-b}^t F_1(\tau) [F_2(t + \delta - \tau) - F_2(t - \tau)] d\tau \\
&+ \int_t^{t+\delta} F_1(\tau) F_2(t + \delta - \tau) d\tau = J_1 + J_2 + J_3 + J_4
\end{aligned}$$

und zeigt leicht, daß die eventuell uneigentlichen Integrale  $J_1$ ,  $J_3$  und  $J_4$  absolut beliebig klein werden, wenn  $a$  und  $b$  hinreichend klein und  $\delta < b$  ist, so daß es sich nur noch um das eigentliche Integral  $J_2$  handelt. Da  $F_1$  in dem Intervall  $a \leq \tau \leq t - b$  eine obere Grenze  $G_1$  hat, so ist

$$|J_2| \leq G_1 \int_a^{t-b} |F_2(t + \delta - \tau) - F_2(t - \tau)| d\tau = G_1 \int_b^{t-a} |F_2(\tau + \delta) - F_2(\tau)| d\tau.$$

Nun betrachtet man zunächst statt des Intervalls  $b \dots t - a$  das etwas größere  $b \dots t - \frac{a}{2}$  und erinnert sich, daß die Riemannsche Integrabilität der Funktion  $F_2$  in diesem Intervall gleichbedeutend ist mit dem Verschwinden ihrer „mittleren Schwankung“, so daß man durch hinreichend weit getriebene Unterteilung des Intervalls in Teilintervalle es muß erreichen können, daß die „durchschnittliche Schwankung“ in diesen beliebig klein wird. Durch eine kleine Zwischenüberlegung schließt man hieraus Folgendes: Das Intervall  $b \dots t - \frac{a}{2}$  sei in  $2n + 1$  gleiche Teile durch die Punkte

$$\tau_0 = b, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n}, \tau_{2n+1} = t - \frac{a}{2}$$

geteilt, und man fasse das eine Mal die durch

$$\tau_0, \tau_2, \dots, \tau_{2n-2}, \tau_{2n} \text{ („geradzahlige“ Teilung),}$$

das andere Mal die durch

$$\tau_1, \tau_3, \dots, \tau_{2n-1}, \tau_{2n+1} \text{ („ungeradzahlige“ Teilung)}$$

gebildeten Teilintervalle ins Auge. Die obere und untere Grenze in einem Teilintervall benenne man nach dem rechten Endpunkt, nämlich  $M_2, \mu_2; M_4, \mu_4; \dots$  bzw.  $M_3, \mu_3; M_5, \mu_5; \dots$ . Dann kann man  $n$  so groß wählen, daß zu gleicher Zeit die beiden durchschnittlichen Schwankungen

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (M_{2\nu} - \mu_{2\nu}) = \frac{1}{\tau_{2n} - \tau_0} \sum_{\nu=1}^n (M_{2\nu} - \mu_{2\nu}) (\tau_{2\nu} - \tau_{2\nu-2})$$

und

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (M_{2\nu+1} - \mu_{2\nu+1}) = \frac{1}{\tau_{2n+1} - \tau_1} \sum_{\nu=1}^n (M_{2\nu+1} - \mu_{2\nu+1}) (\tau_{2\nu+1} - \tau_{2\nu-1})$$

beliebig klein werden und außerdem  $\frac{t - \frac{a}{2} - b}{2n+1} < \frac{a}{2}$  ist, so daß  $\tau_{2n} > t - a$  wird.

Nun ist

$$\int_b^{t-a} |F_2(\tau + \delta) - F_2(\tau)| d\tau \leq \int_{\tau_0}^{\tau_{2n}} |F_2(\tau + \delta) - F_2(\tau)| d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_2}^{\tau_3} + \dots + \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}}.$$

Man wählt jetzt  $\delta$  nicht nur kleiner als  $b$ , sondern auch kleiner als ein

Teilstück  $\tau_a \tau_{a+1} = \frac{t - \frac{a}{2} - b}{2n+1}$  und vergleicht die Teilintegrale, deren untere Grenze einen geradzahigen Index trägt, mit der durchschnittlichen Schwankung für die geradzahige, die übrigen mit der für die ungeradzahige Teilung. Zum Beispiel in  $\int_{\tau_0}^{\tau_1}$  variiert  $\tau$  zwischen  $\tau_0$  und  $\tau_1$ ,  $\tau + \delta$  wegen  $\delta < \tau_2 - \tau_1$  höchstens zwischen  $\tau_0$  und  $\tau_2$ , so daß sich ergibt:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} |F_2(\tau + \delta) - F_2(\tau)| d\tau \leq (M_2 - \mu_2)(\tau_1 - \tau_0) = \frac{1}{2}(M_2 - \mu_2)(\tau_2 - \tau_0);$$

ebenso

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |F_2(\tau + \delta) - F_2(\tau)| d\tau \leq (M_4 - \mu_4)(\tau_2 - \tau_1) = \frac{1}{2}(M_4 - \mu_4)(\tau_4 - \tau_2)$$

usw., also

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} + \dots + \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n (M_{2r} - \mu_{2r})(\tau_{2r} - \tau_{2r-2})$$

und analog

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_2}^{\tau_3} + \dots + \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n (M_{2r+1} - \mu_{2r+1})(\tau_{2r+1} - \tau_{2r-1}).$$

Beide Teile können also beliebig klein gemacht werden, womit dasselbe für  $|J_2|$  bewiesen ist. — Für negatives  $\delta$  verläuft der Stetigkeitsbeweis analog.

Die Gesamtheit derjenigen  $J$ -Funktionen, die für *alle*  $t > 0$  definiert sind und sich im Unendlichen so verhalten, daß für ein gewisses reelles  $s_0$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega e^{-st} |F(t)| dt$$

existiert, bildet einen *Teilbereich*  $J_L$  des Funktionenbereiches  $J$ . Eine  $J_L$ -Funktion besitzt eine in der Halbebene  $\Re s > s_0$  absolut konvergente und in diesem Gebiete analytische *Laplace-transformierte*

$$L(F) \equiv f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt,$$

die als

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^{\sigma} e^{-st} F(t) dt$$

erklärt ist.

Diese Tatsache<sup>6)</sup> sowie einige weitere grundlegende Sätze über die Laplacetransformation, die wir im Folgenden brauchen werden, sind in der bisherigen Literatur teils nur für beim Nullpunkt *eigentlich* integrable  $F(t)$ , teils für uneigentliche Integrabilität unter gewissen speziellen Voraussetzungen bewiesen. Die Beweise lassen sich aber sämtlich ohne besondere Mühe auf unseren allgemeinen Fall erweitern, und es sei deshalb in der Folge nur immer kurz darauf hingewiesen, wenn ein zitierter Satz im Original nicht ganz so weit reicht, wie wir ihn brauchen.

Um die in der Literatur üblichen, aber nicht von allen Autoren in gleichem Sinne gebrauchten Bezeichnungen *fonction génératrice* und *fonction déterminante* zu vermeiden, werde der Funktionenbereich  $J_L$  auch *Oberbereich*, die einzelne  $J_L$ -Funktion *Oberfunktion* genannt, dagegen die Gesamtheit der zugehörigen Laplacetransformierten *Unterbereich*, das einzelne Individuum *Unterfunktion*.

Zu jeder Oberfunktion ist die Unterfunktion *eindeutig* bestimmt, aber nicht umgekehrt, da z. B. zwei Oberfunktionen, die nur an endlich vielen Stellen verschieden sind, offenbar dieselbe Unterfunktion besitzen. Es besteht jedoch der *Satz von Lerch*<sup>7)</sup>:

Sind zwei Unterfunktionen identisch oder stimmen sie auch nur in einer unendlichen Folge von äquidistanten Punkten überein, die auf einer Parallelen zur Achse des Reellen liegen, so unterscheiden sich die Oberfunktionen nur durch eine Nullfunktion, d. i. eine Funktion  $N(t)$ , deren unbestimmtes Integral  $\int_0^t N(\tau) d\tau$  identisch verschwindet (daraus folgt rückwärts, daß die Unterfunktionen überhaupt identisch waren).

Übrigens ist eine Nullfunktion offenbar an jeder Stelle, wo sie auch nur nach einer Seite stetig ist, gleich 0.

Der Zusammenhang zwischen Ober- und Unterbereich äußert sich u. a. darin, daß gewissen *Operationen*, vorgenommen an Funktionen des Oberbereichs, bestimmte Operationen an den zugehörigen Funktionen des Unterbereichs entsprechen, und zwar interessieren uns speziell die folgenden drei grundlegenden Beziehungen:

<sup>6)</sup> Landau: Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen. Sitzungsber. d. kgl. bayr. Akad. d. Wiss. 36, Jahrgang 1906, S. 151–218.

<sup>7)</sup> Lerch: Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel. Acta Math. 27 (1903), S. 339–351. Der Beweis ist hier nur für eigentlich integrable Oberfunktionen geführt.

I. Sind  $F_1(t)$  und  $F_2(t)$  Oberfunktionen, so ist auch  $F_1 * F_2$  eine solche und es ist

$$L(F_1 * F_2) = L(F_1) \cdot L(F_2),$$

d. h. der Faltung im Oberbereich entspricht im Unterbereich die Multiplikation<sup>5)</sup>.

II. Ist  $F(t)$  eine Oberfunktion, so gilt dasselbe für  $t^\nu F(t)$ , wo  $\nu$  positiv ganzzahlig ist, und es ist

$$L(t^\nu F) = (-1)^\nu \frac{d^\nu}{ds^\nu} L(F),$$

d. h. der Multiplikation mit einer Potenz  $t^\nu$  im Oberbereich entspricht im Unterbereich bis aufs Vorzeichen der Übergang zur  $\nu$ -ten Ableitung.

Dies ergibt sich daraus, daß

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

beliebig oft nach  $s$  unter dem Integralzeichen differenziert werden darf<sup>6)</sup>:

$$f^{(\nu)}(s) = \int_0^\infty (-t)^\nu e^{-st} F(t) dt.$$

III. Existiert eine Funktion  $F(t)$  mit ihren  $\nu - 1$  ersten Ableitungen für  $t \geq 0$ , ist  $F^{(\nu-1)}$  bei  $t=0$  stetig und die  $\nu$ -te Ableitung  $F^{(\nu)}$  für  $t > 0$  vorhanden und eine Oberfunktion, so ist auch  $F$  eine solche, und es gilt die Beziehung:

$$\begin{aligned} L(F^{(\nu)}) &= s^\nu L(F) - \{F(0)s^{\nu-1} + F'(0)s^{\nu-2} + \dots + F^{(\nu-2)}(0)s + F^{(\nu-1)}(0)\} \\ &= s^\nu L\left(F(t) - F(0) - \frac{F'(0)}{1!}t - \frac{F''(0)}{2!}t^2 - \dots - \frac{F^{(\nu-1)}(0)}{(\nu-1)!}t^{\nu-1}\right). \end{aligned}$$

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß die Faltung mit der Funktion 1 identisch ist mit der Integration von 0 bis  $t$ , also

$$F^{(\nu)} * 1 = F^{(\nu-1)}(t) - F^{(\nu-1)}(0)$$

$$F^{(\nu)} * 1 * 1 = F^{(\nu-2)}(t) - F^{(\nu-2)}(0) - F^{(\nu-1)}(0)t$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F^{(\nu)} * \underset{1}{1} * \dots * \underset{\nu}{1} = F(t) - F(0) - \frac{F'(0)}{1!}t - \dots - \frac{F^{(\nu-1)}(0)}{(\nu-1)!}t^{\nu-1}.$$

<sup>5)</sup> Horn: Verallgemeinerte Laplacesche Integrale als Lösungen linearer und nicht-linearer Differentialgleichungen. Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 25 (1917), S. 301–325 [S. 323–325].  $F_1$  und  $F_2$  dürfen in dem Hornschen Beweise uneigentlich integrierbar sein, werden jedoch in der Umgebung von  $t=0$  und  $t=\infty$  gewissen einschränkenden Voraussetzungen unterworfen.

<sup>6)</sup> Landau, l. c. <sup>6)</sup>. Der dortige Beweis beschränkt sich auf eigentlich integrierbares  $F(t)$ .

Nun ist nach dem Gesetz I:

$$L\left(\frac{1}{1} * \dots * \frac{1}{v}\right) = [L(1)]^v = \frac{1}{s^v},$$

und nach II:

$$L(t^\alpha) = L(t^\alpha \cdot 1) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha} L(1) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha} \frac{1}{s} = \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}},$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^v} L(F^{(v)}) &= L\left(F(t) - F(0) - \frac{F'(0)}{1!} t - \dots - \frac{F^{(v-1)}(0)}{(v-1)!} t^{v-1}\right) \quad \text{oder} \\ &= L(F) - \left\{ \frac{F(0)}{s} + \frac{F'(0)}{s^2} + \dots + \frac{F^{(v-1)}(0)}{s^v} \right\}. \end{aligned}$$

## § 2.

### Integralgleichungen vom Faltungstypus.

Zunächst überzeugen wir uns, daß die Operation der Faltung für  $J$ -Funktionen das *kommutative Gesetz* (denn durch die Substitution  $t - \tau = u$  folgt

$$F_1 * F_2 = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t F_1(t - u) F_2(u) du = F_2 * F_1)$$

und weiterhin auch das *assoziative Gesetz* erfüllt. Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß eine  $J$ -Funktion, die keine  $J_L$ -Funktion ist, d. h. die entweder für  $t > T > 0$  überhaupt nicht mehr definiert ist oder die sich, wenn sie dort definiert ist, im Unendlichen so verhält, daß ihre Laplace-transformierte nicht existiert, stets so weiterdefiniert oder von einer Stelle an so abgeändert werden kann, daß sie eine  $J_L$ -Funktion wird (z. B. indem man sie für  $t > T$  gleich Null setzt). Die auf irgendeine solche Weise ergänzte oder abgeänderte Funktion werde fortan mit  $\bar{F}$  bezeichnet. Sind nun  $F_1, F_2$  und  $F_3$   $J$ -Funktionen mit dem gemeinsamen Definitionsintervall  $0 < t \leq T$ , so ist nach dem Gesetz I:

$$L\{\bar{F}_1 * (\bar{F}_2 * \bar{F}_3)\} = L(\bar{F}_1) \cdot L(\bar{F}_2 * \bar{F}_3) = L(\bar{F}_1) \cdot L(\bar{F}_2) \cdot L(\bar{F}_3)$$

und

$$L\{(\bar{F}_1 * \bar{F}_2) * \bar{F}_3\} = L(\bar{F}_1 * \bar{F}_2) \cdot L(\bar{F}_3) = L(\bar{F}_1) \cdot L(\bar{F}_2) \cdot L(\bar{F}_3),$$

also

$$L\{\bar{F}_1 * (\bar{F}_2 * \bar{F}_3)\} = L\{(\bar{F}_1 * \bar{F}_2) * \bar{F}_3\},$$

woraus nach dem Satz von Lerch folgt:

$$\bar{F}_1 * (\bar{F}_2 * \bar{F}_3) = (\bar{F}_1 * \bar{F}_2) * \bar{F}_3 + \text{Nullfunktion.}$$

Da nach S. 194 die beiden Faltungsfunktionen für  $t > 0$  stetig sind, so gilt dasselbe für die Nullfunktion, diese ist also für  $t > 0$  identisch 0. Im

Intervall  $0 < t \leq T$  stimmen aber die Funktionen  $\bar{F}$  mit den  $F$  überein, so daß wir erhalten<sup>10)</sup>:

$$F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3.$$

Es hat also einen Sinn,  $F_1 * F_2 * F_3$  ohne weitere Angaben zu schreiben. Faltungen einer Funktion mit sich selbst werden wir in Potenzform schreiben:  $F * F = F^{**}$ , usw.

Wir betrachten nun eine Klasse von *Integro-Differentialgleichungen*, die sich dadurch auszeichnen, daß in ihnen die vorkommenden Integrale vom Charakter der Faltung sind.

Der einfacheren Formulierungen wegen seien die reinen *Integralgleichungen* vorangestellt.

Es sei  $\Phi(x_0, x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p)$  eine ganze rationale Funktion von  $n + p + 1$  Variablen. Sind  $F_1(t), \dots, F_p(t)$   $J_L$ -Funktionen,  $F(t)$  eine beliebige Funktion, so ersetzen wir in  $\Phi$  die Variable  $x_r$  durch  $t^r F(t)$ ,  $y_\mu$  durch  $F_\mu(t)$  und Multiplikationen bis auf die mit den Koeffizienten durch Faltungen, also das Glied

$$A x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} y_1^{\beta_1} \dots y_p^{\beta_p}$$

durch

$$A F^{*a_0} * (tF)^{*a_1} * \dots * (t^n F)^{*a_n} * F_1^{*\beta_1} * \dots * F_p^{*\beta_p}.$$

Dann ist

$$\Phi(F^*, (tF)^*, \dots, (t^n F)^*; F_1^*, \dots, F_p^*) = 0$$

eine Integralgleichung für  $F$ , die wir eine „Integralgleichung vom *Faltungstypus*“ nennen und zu der wir alle Lösungen suchen wollen, die  $J_L$ -Funktionen sind.

In einer solchen Integralgleichung darf also die unbekannte Funktion  $F(t)$  mit sich selbst und beliebigen anderen Funktionen durch *Faltung* und außerdem, da die Aggregate  $t^r F(t)$  auftreten können, mit *ganzen rationalen Funktionen* durch *Multiplikation* verbunden vorkommen.

Angenommen, unsere Gleichung habe eine Lösung  $F(t)$ , die eine  $J_L$ -Funktion ist. Dann ist nach den Gesetzen I und II auch jede Faltungsfunktion, die in  $\Phi$  als Summand auftritt, eine  $J_L$ -Funktion, und ihre Unterfunktion ist das Produkt der Unterfunktionen der Einzelglieder. Bezeichnen wir daher die Unterfunktionen von  $F, F_1, \dots, F_p$  mit  $f(s), f_1(s), \dots, f_p(s)$ , so besteht im Unterbereich die Gleichung:

$$\Phi(f, -f', \dots, (-1)^n f^{(n)}; f_1, \dots, f_p) = 0,$$

<sup>10)</sup> Dieser Beweis macht von irgendwelchen Stetigkeitsvoraussetzungen über die  $J$ -Funktionen, die man z. B. bei dem naheliegenden direkten Beweis über das Doppelintegral nötig hätte, keinen Gebrauch.

die eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, im Falle  $n = 0$  eine algebraische Gleichung ist.

Umgekehrt behaupten wir: Ist eine Lösung  $f(s)$  dieser Gleichung eine Unterfunktion und ist  $F(t)$  eine ihrer Oberfunktionen, so bringt diese zwar im allgemeinen die linke Seite der Integralgleichung nicht identisch zum Verschwinden, macht sie jedoch identisch gleich einer Nullfunktion. Denn wir können die Gleichung im Unterbereich dann so schreiben:

$$\Phi(L(F), L(tF), \dots, L(t^n F); L(F_1), \dots, L(F_p)) = 0,$$

oder nach Gesetz I:

$$L\{\Phi(F^*, (tF)^*, \dots, (t^n F)^*; F_1^*, \dots, F_p^*)\} = 0,$$

woraus nach dem Lerchschen Satze folgt:

$$\Phi(F^*, (tF)^*, \dots, (t^n F)^*; F_1^*, \dots, F_p^*) = \text{Nullfunktion.}$$

Hat also die Integralgleichung  $J_L$ -Funktionen zu Lösungen, so kann man diese auf folgende Weise erhalten:

1. Man transformiere die Gleichung in die entsprechende Differentialgleichung und suche deren Lösungen, wenn solche existieren.
2. Man lese unter diesen diejenigen aus, die Unterfunktionen sind.
3. Man wähle unter den ihnen entsprechenden Oberfunktionen diejenigen aus, die die linke Seite der Integralgleichung nicht bloß zu einer Nullfunktion, sondern identisch zu 0 machen.

Da die Werte einer Lösung  $F$  in einem Intervall  $0 < t \leq T$  nur von den Werten der gegebenen Funktionen in diesem Intervall abhängen können, so lassen sich auf die gleiche Weise auch Integralgleichungen erledigen, bei denen die Koeffizientenfunktionen und Lösungen nicht  $J_L$ -, sondern nur  $J$ -Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsintervall  $0 < t \leq T$  sind, wenn sie sich sämtlich zu  $J_L$ -Funktionen so ergänzen lassen, daß die Integralgleichung auch für  $t > T$  erfüllt bleibt. Jede Lösung der erweiterten Integralgleichung stellt im Intervall  $0 < t \leq T$  eine Lösung der ursprünglichen dar.

Zwei triviale Beispiele mögen den oben angegebenen Gang der Lösung illustrieren:

$$1) \quad F * F_1 - F_2 = 0.$$

$F_1$  und  $F_2$  seien  $J_L$ -Funktionen. Ist  $F_2$  an der Stelle  $t = t_0$  unstetig, so ist von vornherein klar, daß in einem Intervall, das  $t_0$  enthält, keine Lösung existiert, da  $F * F_1$  notwendig stetig ist. — Es sei also  $F_2$  überall stetig. Im Unterbereich lautet die entsprechende Gleichung  $f \cdot f_1 - f_2 = 0$ ; diese ist für  $f_1 \neq 0$  stets lösbar:  $f = \frac{f_2}{f_1}$ . Diese Funktion braucht aber keine Unterfunktion zu sein. Denn, wie man sich leicht

überzeugt, muß eine solche für  $s \rightarrow +\infty$  gegen 0 streben. Dies braucht bei  $\frac{f_2}{f_1}$  nicht der Fall zu sein, nämlich wenn  $f_1$  stärker gegen 0 strebt als  $f_2$ . Ist jedoch  $\frac{f_2}{f_1}$  eine Unterfunktion, so ist jede ihrer Oberfunktionen, die sich voneinander nur durch Nullfunktionen unterscheiden, eine Lösung.

$$2) \quad \Phi((tF)^*; F_1^*, \dots, F_p^*) = 0,$$

wo  $\Phi$  eine ganze rationale Funktion ist. Dieser Gleichung entspricht, wenn  $F_1, \dots, F_p$   $J_L$ -Funktionen sind, im Unterbereich die Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\Phi(-f'; f_1, \dots, f_p) = 0.$$

Wir denken diese Gleichung in der Nähe einer Stelle, wo es möglich ist, nach  $f'$  aufgelöst:

$$f' = \Psi(f_1, \dots, f_p),$$

wo  $\Psi$  im allgemeinen mehrdeutig ist. Dann ist

$$f(s) = \int \Psi(f_1(s), \dots, f_p(s)) ds + C.$$

Dies sind für jeden Zweig von  $\Psi$  unendlich viele Lösungen, von denen aber immer höchstens eine eine Unterfunktion ist. Denn sei diese  $f_0(s)$ , so ist jede andere Lösung  $f_0(s) + C$  ( $C \neq 0$ ) keine Unterfunktion, da eine von 0 verschiedene Konstante keine Oberfunktion besitzt<sup>11)</sup>. Unsere Integralgleichung kann also höchstens so viel Lösungen haben, als  $\Psi$  Zweige besitzt, im Einklang mit der Tatsache, daß man  $tF$  sofort gleich einer neuen Funktion hätte setzen können, wodurch man im Unterbereich eine *algebraische* Gleichung erhalten hätte.

### § 3.

#### Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus.

Wir betrachten Integralgleichungen von derselben Form wie vorhin, in denen aber noch Ableitungen der gesuchten Funktion nach der Integrationsvariablen vorkommen<sup>12)</sup>, also

$$\Psi\{F^*, (tF)^*, \dots, (t^n F)^*; F'^*, \dots, F^{(r)*}; F_1^*, \dots, F_p^*\} = 0,$$

<sup>11)</sup> Dies folgt schon aus der obigen Bemerkung, daß  $f(s) \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow +\infty$  sein muß, läßt sich aber auch so beweisen: Angenommen, es wäre  $L(F) = C$ . Dann ist  $L(tF) = -\frac{d}{ds} L(F) = 0$ , also nach dem Lerchschen Satz  $tF$ , somit auch  $F$  eine Nullfunktion. Dann muß aber  $L(F) = C = 0$  sein.

<sup>12)</sup> Ableitungen nach einem Parameter, wie Volterra (a. l. o. 2)) sie betrachtet, wären natürlich leicht zu behandeln, da unter geeigneten Voraussetzungen  $L\left(\frac{\partial F(t|\alpha)}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(F)$  ist.



wo  $\Psi$  ein Polynom bedeutet und  $F_1, \dots, F_p$   $J_L$ -Funktionen sind. Solche Gleichungen nennen wir „Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus“ und suchen diejenigen Lösungen  $F(t)$ , wo  $F, F', \dots, F^{(\nu-1)}$  für  $t \geq 0$  existieren,  $F^{(\nu-1)}$  bei  $t=0$  stetig und  $F^{(\nu)}$  für  $t > 0$  vorhanden und eine  $J_L$ -Funktion ist.

Man kann solche Gleichungen dadurch zu lösen suchen, daß man

$$F^{(\nu)}(t) = G(t),$$

also

$$F^{(\nu-1)}(t) = G(t) * 1 + F^{(\nu-1)}(0),$$

$$F^{(\nu-2)}(t) = G(t) * 1^{**} + F^{(\nu-1)}(0) t + F^{(\nu-2)}(0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F(t) = G(t) * 1^{**\nu} + F^{(\nu-1)}(0) \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \dots + F'(0) \frac{t}{1!} + F(0)$$

setzt, wodurch man wieder eine reine Integralgleichung in  $G(t)$  bekommt. Es gibt aber Fälle — und wir werden unten ein Beispiel kennen lernen —, wo die Lösung einfacher und eleganter wird, wenn man das Gesetz III heranzieht und direkt die entsprechende Gleichung im Unterbereich aufstellt:

$$\Psi\{f, -f', \dots, (-1)^n f^{(n)};$$

$$sf - F(0), \dots, s^\nu f - (F(0)s^{\nu-1} + F'(0)s^{\nu-2} + \dots + F^{(\nu-1)}(0));$$

$$f_1, \dots, f_p\} = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, die die Parameter  $F(0), F'(0), \dots, F^{(\nu-1)}(0)$  enthält, die willkürlich vorgegeben werden können. Im Übrigen vollzieht sich die weitere Lösung wie bei den reinen Integralgleichungen, abgesehen davon, daß jetzt von den Oberfunktionen nur die in Betracht kommen, die Ableitungen bis zur  $\nu$ -ten Ordnung besitzen.

#### § 4.

**Zwei klassische Gleichungen vom Faltungstypus: Die Integrodifferentialgleichung von Abel und die Integralgleichung von Sonine.**

Gelegentlich eines mechanischen Problems löste Abel die wohl als erste in der Literatur vorkommende Integrodifferentialgleichung

$$F_1(t) = \int_0^t (t-\tau)^{-n} \frac{dF(\tau)}{d\tau} d\tau$$

mit der Unbekannten  $F(t)$  unter der teils ausdrücklichen, teils stillschweigenden Voraussetzung  $0 < n < 1$ . Die Lösung

$$F(t) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} F_1(\tau) d\tau,$$

zu der naturgemäß noch eine willkürliche additive Konstante  $F(0)$  treten kann, fand er auf zwei Wegen: Bei der ersten, weniger allgemeinen Lösung<sup>13)</sup> setzt er  $F$  und  $F_1$  als entwickelbar in Dirichletsche Reihen voraus und bekommt  $F$  durch Koeffizientenvergleich; bei der zweiten Lösung<sup>14)</sup> geht er aus von der Beta-Funktion und gewinnt die erforderliche Formel durch mehrmalige Integrationen. Die für die Beweise notwendigen Voraussetzungen werden von Abel nicht formuliert.

Die Gleichung gehört zum Faltungstypus und kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$F_1(t) = t^{-n} * F'(t).$$

$F_1(t)$  sei eine  $J_L$ -Funktion und für  $t > 0$  stetig, denn sonst existiert sicher keine Lösung; ferner sei  $0 < n < 1$ . Wir suchen jede Lösung  $F(t)$ , die die Gleichung für  $0 < t$  befriedigt, bei der  $F(0)$  endlich und deren Ableitung  $F'(t)$  eine  $J_L$ -Funktion ist. Dann ist nach Gesetz III auch  $F(t)$  eine  $J_L$ -Funktion, und es lautet die entsprechende Gleichung im Unterbereich, da  $L(t^{-n}) = \Gamma(1-n)s^{n-1}$  für  $n < 1$  ist:

$$f_1(s) = \Gamma(1-n)s^{n-1}(sf(s) - F(0)),$$

die die Lösung hat:

$$f(s) = \frac{F(0)}{s} + \frac{1}{\Gamma(1-n)} \frac{1}{s^n} f_1(s).$$

Da  $L(1) = \frac{1}{s}$  und  $L\left(\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\right) = \frac{1}{s^n}$  für  $n > 0$  ist, so sind  $\frac{1}{s}$  und  $\frac{1}{s^n}$  Unterfunktionen, also nach Gesetz I auch  $\frac{1}{s^n} f_1(s)$ , folglich auch  $f(s)$ . Alle zu  $f(s)$  gehörigen Oberfunktionen haben die Form:

$$F(t) = F(0) + \frac{1}{\Gamma(1-n)\Gamma(n)} t^{n-1} * F_1(t) + \text{Nullfunktion.}$$

Da  $F(t)$  differenzierbar, also stetig sein muß, so kommt nur

$$\begin{aligned} F(t) &= F(0) + \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(1-n)} t^{n-1} * F_1(t) \\ &= F(0) + \frac{\sin n\pi}{\pi} t^{n-1} * F_1(t) \end{aligned}$$

in Frage. Ist diese Funktion differenzierbar<sup>15)</sup>, so stellt sie die einzige Lösung dar, die die S. 203 formulierten Bedingungen erfüllt.

<sup>13)</sup> Abel: Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. Œuvres complètes, Nouv. éd. t. I, Abhandlung II, S. 11–27.

<sup>14)</sup> Abel: Résolution d'un problème de mécanique. Ibid. Abhandl. IX, S. 97–101.

<sup>15)</sup> Für unstetiges  $F_1$  läßt sich leicht ein Beispiel angeben, wo die Funktion nicht differenzierbar ist. Es sei  $n = \frac{1}{2}$  und  $F_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  für  $0 < t \leq 1$ ,  $F_1(t) = 0$  für  $t > 1$ .

Dann ist für  $0 < t \leq 1$ :  $t^{n-1} * F_1(t) = \pi$  und für  $t > 1$ :  $t^{n-1} * F_1(t) = \pi - 2 \arctg \sqrt{t-1}$ . Die Faltungsfunktion ist also im Punkte 1 nicht differenzierbar, da die Ableitung von links gleich 0, die von rechts gleich  $-\infty$  ist.

Nachträglich überzeugt man sich, daß diese Lösung auch gilt, wenn  $F_1(t)$  keine  $J_L$ -Funktion, sondern eine nur für  $0 < t \leq T$  definierte, stetige  $J$ -Funktion ist. Denn in diesem Falle lassen  $F_1$  und  $F$  sich zu  $J_L$ -Funktionen ergänzen derart, daß die Integralgleichung erfüllt bleibt.

Hätte man die andere Lösungsmöglichkeit angewandt und  $F'(t) = G(t)$  gesetzt, so hätte man im Unterbereich die Gleichung erhalten:

$$f_1(s) = \Gamma(1-n) s^{n-1} g(s)$$

mit der Lösung

$$g(s) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} s^{1-n} f_1(s).$$

Für  $n < 1$  ist aber  $s^{1-n}$  keine Unterfunktion, so daß man der rechten Seite nicht ansieht, ob sie eine Unterfunktion darstellt, und, auch wenn dies feststeht, die zugehörige Oberfunktion nicht angeben kann.

Setzt man die oben gefundene Lösung in die Integralgleichung ein, so ergibt sich die *Identität*:

$$F_1(t) = t^{-n} * \frac{d}{dt} \left[ \frac{\sin n\pi}{\pi} t^{n-1} * F_1(t) \right].$$

Existiert  $F_1'(t)$  für  $t > 0$  und ist eine  $J$ -Funktion, und ist  $F_1$  bei  $t = 0$  stetig, so kann man setzen:

$$F_1(t) = F_1'(t) * 1 + F_1(0),$$

wodurch die Identität übergeht in

$$F_1(t) = \frac{\sin n\pi}{\pi} t^{-n} * \frac{d}{dt} \left[ t^{n-1} * F_1'(t) * 1 + t^{n-1} * F_1(0) \right].$$

Da  $t^{n-1} * F_1'(t)$  und  $t^{n-1}$  stetig sind, so kann man die durch Faltung mit einer Konstanten dargestellten Integrale differenzieren und erhält:

$$F_1(t) = \frac{\sin n\pi}{\pi} t^{-n} * t^{n-1} * F_1'(t) + \frac{\sin n\pi}{\pi} t^{-n} * t^{n-1} * F_1(0),$$

oder wenn man im zweiten Gliede  $t^{-n} * t^{n-1}$  durch seinen Wert  $\frac{\pi}{\sin n\pi}$  ersetzt:

$$F_1(t) = \frac{\sin n\pi}{\pi} t^{-n} * t^{n-1} * F_1'(t) + F_1(0).$$

Diese Formel gibt Abel in der zitierten<sup>14)</sup> Abhandlung IX an, allerdings ohne das Glied  $F_1(0)$ , ohne das sie aber unrichtig wird (z. B. für  $F_1 \equiv 1$ ). Übrigens ist diese Formel, die Abel in der Integralform

$$F_1(t) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^t \frac{dz}{(t-z)^{1-n}} \int_0^z \frac{F_1'(z)}{(z-x)^n} dz$$

schreibt, in unserer Symbolik und unter Anwendung des assoziativen Gesetzes trivial, da sie wegen  $t^{-n} * t^{n-1} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$  mit  $F_1(t) = F_1'(t) * 1 + F_1(0)$  identisch ist.

An die Abelsche Formel, die auch so geschrieben werden kann:

$$F_1'(t) * 1 = \frac{\sin n\pi}{\pi} t^{-n} * t^{n-1} * F_1'(t)$$

hat Sonine<sup>16)</sup> angeknüpft, indem er Funktionenpaare  $\Sigma(t)$  und  $\Psi(t)$  so zu bestimmen suchte, daß bei beliebigem integrelem  $F(t)$  die Gleichung

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \int_0^t \Psi(t-\tau) d\tau \int_0^\tau F(z) \Sigma(\tau-z) dz,$$

d. h. in unserer Symbolik

$$F * 1 = \Psi * F * \Sigma$$

erfüllt wird. Dazu ist hinreichend, daß

$$\Psi * \Sigma = 1$$

ist. Sonine gibt ein Verfahren an, um solche  $\Psi$  und  $\Sigma$  zu bestimmen, das aber nicht alle Lösungen liefert, sondern nur die von der Form:

$$\Sigma(t) = t^{-p} \cdot \text{ganze Funktion}, \quad \Psi(t) = t^{-q} \cdot \text{ganze Funktion},$$

wobei  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$ ,  $p + q = 1$  ist. Wir können sofort alle  $J_L$ -Funktionen angeben, die der Gleichung genügen, denn es genügt, alle Unterfunktionen  $\psi(s)$ ,  $\sigma(s)$  von der Eigenschaft

$$\psi(s) \cdot \sigma(s) = \frac{1}{s}$$

zu bestimmen. Übrigens ist es interessant, daß Sonine seine Lösungen auch aus anderen Funktionenpaaren ableitet, die zu ihnen wie die Unterfunktionen zu den Oberfunktionen stehen.

Als *Beispiel*, das nicht unter die Soninesche Speziallösung fällt, sei angeführt:

$$U(c/t) * U\left(c + \frac{\pi}{2}/t\right) = 1,$$

wo

$$U(c/t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2m\pi t - \frac{m^2}{t}}$$

die allgemeine Lösung der Bernsteinschen Integralgleichung<sup>17)</sup> der Thetafunktion ist.  $U(c/t)$  hat nämlich die Unterfunktion

$$u(c/s) = -\frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{-s-c})}{\sqrt{-s}}$$

<sup>16)</sup> Sonine: Sur la généralisation d'une formule d'Abel. Acta Math. 4 (1884), S. 171–176.

<sup>17)</sup> Vgl. die unter \*) zitierte Arbeit, S. 40, 41.

und es ist

$$u(c/s) \cdot u\left(c + \frac{\pi}{2}/s\right) = - \frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{-s}-c) \operatorname{ctg}\left(\sqrt{-s}-c - \frac{\pi}{2}\right)}{s}$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{-s}-c) \frac{1}{\operatorname{ctg}(\sqrt{-s}-c)}}{s} = \frac{1}{s}.$$

Da

$$U(0/t) = \vartheta_3(0/i\pi t), \quad U\left(\frac{\pi}{2}/t\right) = \vartheta_3(0/i\pi t)$$

(in der Schwarzschen Bezeichnung) ist, so erhält man für  $c=0$  die anscheinend bisher nicht bekannte Thetarelation:

$$\vartheta_3(0/i\pi t) * \vartheta_3(0/i\pi t) = 1.$$

Sonine gibt weiterhin auch spezielle Lösungen von *allgemeineren* Gleichungen an, die sich in unserer Symbolik so schreiben lassen:

$$\Psi * \Sigma = \frac{t^{1-p-q}}{\Gamma(2-p-q)} \quad (p < 1, q < 1),$$

bzw.

$$\Psi * \Sigma = \Phi,$$

wo  $\Phi$  von der Form  $t^r$ -ganze Funktion ( $r < 1$ ) ist. Man kann auf Grund der obigen Theorie sofort alle  $J_L$ -Funktionen angeben, die diese Gleichungen befriedigen.

Halle, 31. Juli 1922.

(Eingegangen am 8. 11. 1922.)

## Über die ebene radiale Strömung eines Gases mit Berücksichtigung der Reibung.

Von

Theodor Pöschl in Prag.

Die Anzahl der bekannten exakten Lösungen der Bewegungsgleichungen eines strömenden Gases mit Berücksichtigung der Reibung ist sehr gering. In der vorliegenden Mitteilung möchte ich zeigen — was bisher nicht bekannt gewesen zu sein scheint —, daß sich der Fall der laminaren stationären Strömung eines Gases in einer *Winkeldüse* (so möge etwa die ebene Radialströmung aus einer punktförmigen Quelle bezeichnet werden) exakt integrieren läßt und im allgemeinen auf höhere transzendente (etwa als hyperelliptisch im weiteren Sinne zu bezeichnende) und für isothermische Zustandsänderung des Gases auf elementare Funktionen führt, während G. Hamel<sup>1)</sup> für den analogen Fall der unzusammendrückbaren Flüssigkeit die Lösung in elliptischen Funktionen gefunden hat. Dabei bleibt jedoch hier die Frage nach der Bestimmung *aller* Lösungen, die eine Integration auf der gleichen Grundlage gestatten, vorläufig unerledigt; diese Grundlage müßte hier die Annahme sein, daß die Stromlinien der Gasströmung, mit denen einer reibungsfreien und unzusammendrückbaren Flüssigkeit übereinstimmen, wie es in dem hier behandelten Sonderfall der Winkeldüse zutrifft. Die Erledigung dieser Frage verursacht wegen der umständlicheren Elimination des Druckes größere Schwierigkeiten wie im Fall der Flüssigkeit. — Wie für die Flüssigkeiten ist auch für Gase der Fall der *kegelförmigen* Düse auf diese Weise nicht lösbar.

**1. Die Bewegungsgleichungen.** Wenn von äußeren Kräften abgesehen und die Strömung nur als von inneren Druckkräften hervorgerufen angesehen wird, so lauten die Navier-Stokesschen Gleichungen für die

<sup>1)</sup> Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten, Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 25 (1917), S. 34.

stationäre Bewegung des strömenden Gases, auf ebene Polarkoordinaten  $r, \theta$  bezogen<sup>3)</sup>:

$$(1) \quad \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{3\rho} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left( \Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{3\rho} \frac{\partial \theta}{r \partial \theta}, \end{cases}$$

worin  $\Delta$  den Laplaceschen Operator, hier also

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

und  $\theta$  die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes, also

$$\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

bedeutet. Hierzu tritt die Kontinuitätsbedingung

$$(2) \quad \frac{\partial(\rho ru)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \theta} = 0$$

und die Zustandsgleichung des Gases, die in der Form angesetzt werden möge

$$(3) \quad p = \beta \rho^\kappa,$$

wobei  $\kappa$  im Falle der „Adiabate“ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bedeutet, und für die „Isotherme“ gleich 1 ist.

In diesen Gleichungen bedeuten  $u, v$  die Teilgeschwindigkeiten in Richtung von  $r$  und senkrecht dazu,  $p$  den Druck,  $\rho$  die Dichte und  $\mu$  das dynamische Zähigkeitsmaß, dessen Abhängigkeit von der Temperatur im Falle veränderlicher Temperatur im folgenden außer Betracht gelassen wird. Ebenso wird  $\kappa$  als gleichbleibend betrachtet.

Wir suchen nun solche Strömungen, deren Stromlinien in der Richtung von  $r$  verlaufen, setzen also durchweg  $v \equiv 0$ . Dann vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (1) zu

$$(4) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2)}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\mu}{3\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right),$$

$$(5) \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\mu}{3r} \cdot \frac{\partial^2(ru)}{\partial r \partial \theta}$$

mit der Kontinuitätsbedingung

$$(6) \quad \frac{\partial(\rho ru)}{\partial r} = 0$$

und der Zustandsgleichung (3).

<sup>3)</sup> Siehe z. B. A. B. Basset, A Treatise on Hydrodynamics 2, S. 244, und Lamb, Hydrodynamics, 4. edition, Cambridge 1916, S. 573, oder deutsche Ausgabe, Leipzig 1907, S. 665.

Die Randbedingung, der die Funktion  $u$  zu genügen hat, ist die, daß das Gas an den Rändern der durch  $\vartheta = \pm \alpha$  begrenzten Düse haften soll; überdies soll die Lösung zur Mittellinie der Düse symmetrisch sein.

**2. Die Integration der Gleichungen.** Die Gleichung (6) gibt integriert

$$(7) \quad \varrho r u = f(\vartheta),$$

worin  $f$  eine zu bestimmende Funktion von  $\vartheta$  bezeichnet, die als *Stromfunktion* angesehen werden kann.

Für die Geschwindigkeit  $u$  machen wir den Ansatz

$$(8) \quad u = r^m \cdot U(\vartheta),$$

wobei  $m$  so zu bestimmen ist, daß den Gleichungen (3), (5) und (7) Genüge geleistet wird. Mit Hilfe dieses Ansatzes folgt zunächst aus Gleichung (7):

$$(9) \quad \varrho = \frac{1}{r^{m+1}} \cdot \frac{f}{U}$$

und wenn wir mit dem Ansatz (3) in Gleichung (5) hineingehen, so kommt

$$\beta \kappa \cdot \varrho^{n-1} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} = 2 \mu \cdot r^{m-1} \cdot U' + \frac{\mu}{3} (m+1) r^{m-1} U' = \frac{m+7}{3} \mu r^{m-1} U'$$

oder mit Benützung von Gleichung (9) und der abkürzenden Bezeichnung  $\frac{m+7}{3} = n$ :

$$(10) \quad \beta \kappa \cdot r^{-(m+1)(n-1)-m-1} \cdot \left(\frac{f}{U}\right)^{n-1} \left(\frac{f}{U}\right)' = n \mu \cdot r^{m-1} \cdot U'.$$

Soll diese Gleichung einen Sinn haben, so müssen zunächst die Exponenten von  $r$  zu beiden Seiten übereinstimmen; daraus ergibt sich:

$$(11) \quad m = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1}, \quad n = \frac{2(3\kappa+4)}{3(\kappa+1)},$$

und also

$$(12) \quad u = r^{-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \cdot U.$$

Der übrigbleibende Teil von (10) kann dann integriert werden und liefert, wenn  $C$  eine Integrationskonstante bedeutet:

$$\beta \left(\frac{f}{U}\right)^n = n \mu U + C,$$

oder

$$(13) \quad \frac{f}{U} = \left\{ \frac{n \mu U + C}{\beta} \right\}^{1/n},$$

und damit ergibt sich

$$(14) \quad \varrho = \frac{1}{r^{2(n+1)}} \cdot \left\{ \frac{n \mu U + C}{\beta} \right\}^{1/n}, \quad p = \frac{n \mu U + C}{r^{2n(n+1)}},$$



oder, indem man statt  $r$  mit Benützung von Gleichung (12) die Geschwindigkeit  $u$  einführt:

$$p = (n\mu U + C) \cdot \left(\frac{u}{U}\right)^{2n/(n-1)}$$

und wenn man andererseits  $U$  eliminiert, so folgt:

$$(15) \quad p = n\mu \cdot \frac{u}{r} + \frac{C}{r^{2n/(n+1)}}.$$

Mit dem Ansätze (8) und den daraus abgeleiteten Gleichungen (14) erhalten wir nunmehr aus Gleichung (4), die durch  $r^{-\frac{2n-1}{n+1}}$  dividiert werden kann, die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $U$ :

$$(16) \quad U'' + \left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 U + \frac{1}{\mu} \frac{n-1}{n+1} \left\{ \frac{n\mu U + C}{\beta} \right\}^{1/n} U^2 + \frac{1}{\mu} \frac{2n}{n+1} C = 0.$$

Wenn man diese Gleichung mit  $2U'$  multipliziert und das dritte Glied durch Produktintegration umformt, so ergibt sich für  $U$  die Differentialgleichung erster Ordnung, aus der  $\vartheta$  als hyperelliptisches Integral von  $U$  und umgekehrt  $U$  als hyperelliptische Funktion von  $\vartheta$  bestimmbar ist:

$$(17) \quad U'^2 + \left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 U^2 + \frac{4n}{\mu(n+1)} CU + \frac{2}{n\mu^2} \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{1}{\beta^{1/n}} (n\mu U + C)^{(n+1)/n} \left\{ U^2 - \frac{2n}{n(2n+1)} U(n\mu U + C) + \frac{2n^2}{n^2\mu^2(2n+1)(3n+1)} (n\mu U + C)^2 \right\} = C_1,$$

worin  $C_1$  eine neue Integrationskonstante bedeutet. Wenn  $U_{\max}$  der Wert von  $U$  für  $\vartheta = 0$  ist, so ergibt sich also  $\vartheta$  in der Form

$$(18) \quad \vartheta = \int_0^{U_{\max}} \frac{dU}{\sqrt{P(U, C, C_1)}},$$

wobei  $P$  nach Gleichung (17) ein Ausdruck vom Grade  $(3n+1)/n$  in  $U$  ist.

Zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten  $C$  und  $C_1$  dienen die Symmetrie- und Randbedingungen; die erstere benützen wir in der Form, daß die Geschwindigkeit in der Mitte der Düse ein extremer Wert sein soll, die zweite fordert das *Haften* des Gases am Rande der Düse; also:

$$(19) \quad \begin{cases} \vartheta = 0: U' = 0, & U = U_{\max}, \\ \vartheta = \pm \alpha: & U = 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der ersten der Gleichungen ist  $C_1$  durch  $U_{\max}$  und  $C$  ausgedrückt, während die zweite sodann in der Form erscheint:

$$(20) \quad \alpha = \int_0^{U_{\max}} \frac{dU}{\sqrt{P_1(U, U_{\max}, C)}},$$

in der  $P_1$  vom gleichen Grade wie  $P$  ist; diese Gleichung ist die Bestimmungsgleichung für die Konstante  $C$ , die etwa durch den Durchfluß, also die Ergiebigkeit der in  $r = 0$  liegenden Quelle ausgedrückt werden kann.

**3. Sonderfall der isothermen Zustandsänderung.** Für  $\kappa = 1$  vereinfacht sich die Gleichung (17) wesentlich und läßt eine Lösung in elementaren Funktionen zu. Zunächst folgt aus Gleichung (12)  $u = U$ , also unabhängig von  $r$ , und aus Gleichung (14)

$$(21) \quad \varrho = \frac{1}{\beta} \frac{n \mu u + C}{r}, \quad p = \frac{n \mu u + C}{r},$$

wobei  $n = \frac{7}{2}$  ist, beide also verkehrt proportional zu  $r$ . Die Gleichung (17) als Bestimmungsgleichung für  $U(\vartheta) = u(\vartheta)$  nimmt jetzt die einfache Form an

$$(22) \quad u'^2 = C_1 - \frac{2C}{\mu} u - u^2,$$

woraus folgt, wenn  $\vartheta_0$  eine Integrationskonstante bedeutet:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int \frac{du}{\sqrt{C_1 - \frac{2C}{\mu} u - u^2}} = \arcsin \frac{u + C/\mu}{\sqrt{C_1 + (C/\mu)^2}}$$

und

$$(23) \quad u = \sqrt{C_1 + \left(\frac{C}{\mu}\right)^2} \sin(\vartheta - \vartheta_0) - \frac{C}{\mu}.$$

Die Konstanten werden wieder aus den Rand- und Symmetriebedingungen bestimmt. Für eine symmetrische Strömung muß  $u$  eine gerade Funktion in  $\vartheta$  sein, daraus folgt  $\vartheta_0 = -\pi/2$  und

$$u = \sqrt{C_1 + \left(\frac{C}{\mu}\right)^2} \cos \vartheta - \frac{C}{\mu},$$

wenn ferner die Flüssigkeit am Rand der Düse also für  $\vartheta = \pm \alpha$  haften soll, so ergibt sich

$$\sqrt{C_1 + \left(\frac{C}{\mu}\right)^2} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{C}{\mu},$$

somit

$$(24) \quad u = \frac{C}{\mu} \left[ \frac{\cos \vartheta}{\cos \alpha} - 1 \right].$$

Die Konstante  $C$  läßt sich durch die Durchflußmasse in 1 sek,  $Q$ , ausdrücken; es ist:

$$Q = 2 \int_0^\alpha \varrho r u d\vartheta = \frac{2C^2}{3\beta\mu} \left[ \frac{7\alpha}{2\cos^2\alpha} + 4\alpha - 4\operatorname{tg}\alpha \right]$$

und

$$(25) \quad \frac{C}{\mu} = \sqrt{\frac{3\beta}{2} \frac{Q}{\mu}} / \sqrt{\frac{7\alpha}{2\cos^2\alpha} + 4\alpha - 4\operatorname{tg}\alpha}.$$

Aus Gleichung (24) ist ersichtlich, daß für diesen Sonderfall ein wesentlicher Unterschied in der Strömungsform (d. i. in der Form der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt) zwischen Diffusor und Effusor *nicht* besteht. — Für die isotherme Zustandsänderung ist also die Lösung für *alle* Geschwindigkeiten und Zähigkeiten umkehrbar. Der Unterschied zwischen divergenter und konvergenter Düse macht sich erst bei von 1 verschiedenen Werten von  $\kappa$  in der Zustandsgleichung bemerkbar, für die dann die Gleichung (17) genauer untersucht werden muß.

4. Die angenäherte Integration für beliebiges  $\kappa (\kappa > 1)$  kann etwa in folgender Art durchgeführt werden. Durch die Annahme von  $U_{\max}$  (für  $\vartheta = 0$ ,  $U' = 0$ ) denke man sich zunächst  $C$ , festgelegt. Da die Konstante  $C$  in Gleichung (17) in ziemlich verwickelter Weise vorkommt, so könnte man — die inverse Methode fortsetzend — weiter für  $C$  irgendeinen passenden Wert wählen, mit Hilfe dieses Wertes die Funktion  $\vartheta = \vartheta(U, C)$  und damit auch  $U = U(\vartheta, C)$  graphisch oder numerisch ermitteln, und den zu dieser Lösung gehörigen Öffnungswinkel  $\alpha$  erst nachträglich aus der Lösung selbst bestimmen.

Einen Anhaltspunkt für den zu wählenden Wert von  $C$  kann man sich in der Weise verschaffen, daß man in Gleichung (16) den Ausdruck  $(C + 2\mu U)^{1/\kappa}$  nach Potenzen von  $U$  entwickelt, und durch Weglassung aller Glieder von höherer als der 5. Ordnung die Gleichung (17) auf die Differentialgleichung der elliptischen Funktionen reduziert, die eine einfachere Diskussion gestattet; soll diese Entwicklung zulässig sein, so muß  $C$  entsprechend groß sein. Man erhält zunächst (am einfachsten mit Hilfe der Gleichung (16)):

$$(26) \quad U'^2 + \left(\frac{2\kappa}{\kappa+1}\right)^2 U^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{C}{\beta}\right)^{1/\kappa} \left\{ \frac{2U^3}{3\mu} + \frac{nU^4}{2\kappa C} \right\} + \frac{1}{\mu} \frac{4\kappa}{\kappa+1} C U = C_1.$$

Wenn nun für  $U' = 0$ ,  $U = U_{\max}$  gesetzt und  $C_1$  demgemäß bestimmt wird, ferner die ganze Gleichung durch  $U_{\max}^2$  dividiert und  $U/U_{\max} = z$  gesetzt wird, so folgt:

$$(27) \quad z'^2 = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{U_{\max}^2}{\beta^{1/\kappa} C^{1-1/\kappa}} \left[ \frac{n}{2\kappa} (1-z^4) + \frac{2}{3} \frac{C}{\mu U_{\max}} (1-z^3) \right] \\ + \left(\frac{2\kappa}{\kappa+1}\right)^2 (1-z^2) + \frac{4\kappa}{\kappa+1} \frac{C}{\mu U_{\max}} (1-z).$$

In dieser Gleichung sind  $C/\mu U_{\max}$  und  $U_{\max}^2/\beta^{1/\kappa} C^{1-1/\kappa}$  dimensionslose Zahlen, die die Beschaffenheit der Lösung bestimmen, und die an die Stelle der Reynoldsschen Zahl im Falle der Flüssigkeit treten. In dieser Form gilt die Gleichung für die *divergente* Düse (Diffusor), für die *konvergente* (Effusor) ist das Vorzeichen der Glieder, die  $U_{\max}$  enthalten, umzukehren.

Da bei Gasen  $\mu$  ein kleiner Wert ist, so können für ein bestimmtes  $C$  also für ein bestimmtes  $\alpha$  die folgenden drei Fälle unterschieden werden:

a) *Sehr langsame Bewegung*:  $U_{max}$  so klein, daß  $\mu U_{max}$  klein gegen  $C$ ; dann ist die Strömung angenähert im wesentlichen durch das letzte Glied in (27) bestimmt; wird dieses allein beibehalten, dann folgt

$$z = \frac{U}{U_{max}} = 1 - \left[ \frac{2\kappa}{(\kappa+1)} \frac{C}{\mu U_{max}} \right]^2 \cdot \vartheta^2$$

und wir erhalten für  $z=0$  den halben Öffnungswinkel der Düse in der Form

$$\alpha = \frac{\mu U_{max}}{C} \cdot \frac{\kappa+1}{2\kappa}, \quad \text{oder} \quad C = \frac{(\kappa+1)}{2\kappa} \mu U_{max} \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

b) *Mittlere Bewegung*:  $U_{max}$  ist so groß, daß  $\mu U_{max}$  von der Größenordnung von  $C$  wird; die Strömung ist dann durch die beiden ersten Glieder in Gleichung (27) allein gegeben, in denen ein Einfluß der Strömungsrichtung vorhanden ist, da  $U_{max}$  in der ersten Potenz vorkommt.  $u = u(\vartheta)$  ist als elliptische Funktion gegeben.

c) *Sehr schnelle Bewegung*:  $U_{max}$  sehr groß, dann ist das erste Glied in Gleichung (27) ausschlaggebend und die Lösung ist wieder umkehrbar. (Dabei ist angenommen, daß die laminare Strömungsform bestehen bleibt und nicht in die turbulente umschlägt.)

Die Aufzeichnung der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt nach Gleichung (27) [wie übrigens auch nach der unverkürzten Gleichung (18)] bietet keine Schwierigkeit.

Ein anderer Weg, zu einer angenäherten Integration zu gelangen, wäre der,  $\kappa = 1 + \varepsilon$  zu setzen und nach Potenzen von  $\varepsilon$  zu entwickeln.

(Eingegangen am 5. 10. 1922.)

# Neue zahlentheoretische Abschätzungen.

Von

J. G. van der Corput in Groningen (Niederlande).

## Einleitung.

Die zur Zeit schärfsten Gitterpunktabschätzungen können fast alle abgeleitet werden aus dem folgenden Satze<sup>1)</sup>:

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen B und C' gibt es eine absolute Konstante  $c_1$  mit der Eigenschaft*

$$(1) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} \psi(f(n)) \right| < c_1 \left( \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right).$$

Hierin haben B und C' folgende Bedeutung:

- B.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es habe die reelle Funktion } \psi(v) \text{ die Periode 1; es sei} \\ \psi(v) \text{ absolut } \leq 1, \text{ im Intervall } 0 < v < 1 \text{ monoton, und es sei} \\ \int_0^1 \psi(v) dv = 0. \end{array} \right.$
- C'.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es sei } a+1 \leq b, f(u) \text{ im Intervall } a \leq u \leq b \text{ reell, zweimal} \\ \text{differenzierbar}^2), f''(u) \text{ monoton, stets positiv oder stets negativ}^3). \end{array} \right.$

<sup>1)</sup> J. G. van der Corput: *Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme* (Satz 5); diese Arbeit wird demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen.

<sup>2)</sup> In den Endpunkten eventuell nur einseitig.

<sup>3)</sup> In der in Fußnote <sup>1)</sup> genannten Arbeit habe ich eine Voraussetzung C eingeführt, die Voraussetzung C' als Spezialfall ( $k=2$ ) enthält. Zwar werden ebendort  $a-\frac{1}{2}$  und  $b-\frac{1}{2}$  ganz vorausgesetzt, aber falls (1) unter dieser schärferen Voraussetzung bewiesen ist, gilt sie allgemein mit  $c_1+2$  statt  $c_1$ . Denn es ist

$$\int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{2}} du > (b-a) \geq 1, \text{ oder } \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} > 1,$$

(Fortsetzung der Fußnote 3 auf der nächsten Seite.)

Der Hauptzweck dieser Arbeit ist zu zeigen, daß in der rechten Seite von (1)  $|f''(u)|^{\frac{1}{2}}$  durch eine höhere Potenz von  $|f''(u)|$  ersetzt werden kann, wenn  $C'$  ersetzt wird durch eine Voraussetzung, die zwar schärfer als  $C'$ , aber bei allen bis jetzt untersuchten Anwendungen von Satz 1 erfüllt ist. Diese Voraussetzung lautet:

$$D. \left\{ \begin{array}{l} \text{Es sei Voraussetzung } C' \text{ erfüllt; es sei } \eta > 0, \eta' > 0, k \text{ ganz } \geq 2, \\ f(u) \text{ im Intervall } a \leq u \leq b \text{ } k+1\text{-mal differenzierbar}^2); \text{ es sei} \\ (2) \quad |f'''(u)| \leq |f''(u)|^{\frac{1}{2} + \eta'} \quad (a \leq u \leq b), \\ \text{und jedes System von } k-1 \text{ nicht-negativen ganzen Zahlen} \\ h_1, h_2, \dots, h_{k-1} \text{ mit einer Summe } = k-1 \text{ habe die Eigenschaft} \\ (3) \quad |f^{(h_1+2)}(u) \cdot f^{(h_2+2)}(u) \dots f^{(h_{k-1}+2)}(u)| \leq |f''(u)|^{\frac{1}{2}k-1+\eta} \\ \quad (a \leq u \leq b). \end{array} \right.$$

Der Hauptsatz dieser Arbeit ist dann

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen B und D gibt es eine höchstens nur von  $k$  abhängige Zahl  $c_2$  und eine höchstens nur von  $k, \eta$  und  $\eta'$  abhängige positive Zahl  $\omega$  mit der Eigenschaft*

$$(4) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} \psi(f(n)) \right| < c_2 \left( \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{2} + \omega} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right).$$

Mit dem Spezialfall  $\psi(v) = v - [v] - \frac{1}{2}$  dieses Satzes kann man fast alle bis jetzt bekannten Gitterpunktabschätzungen verschärfen. Außerdem werde ich in dieser Arbeit auch noch die entsprechenden Abschätzungen ableiten, wobei jeder Gitterpunkt  $(u, v)$  nicht mit dem „Gewichte“ 1, aber mit dem komplexen Gewichte  $e^{2\pi i(\lambda u + \mu v)}$  in Anschlag gebracht wird; hierin bezeichnen  $\lambda$  und  $\mu$  beliebige reelle Konstanten.

Es werden in dieser Einleitung nur einige Anwendungen erwähnt; in diesen Anwendungen bezeichnet  $\Theta$  eine geeignet gewählte absolute Konstante  $< \frac{1}{3}$ .

je nachdem  $\min_{a \leq u \leq b} |f''(u)| >$  oder  $\leq 1$  ist. Ungleichung (1) ist also trivial, falls  $b-a \leq 2$ , und sonst gilt (1) mit  $\alpha = [a + \frac{1}{2}] + \frac{1}{2}$  und  $\beta = [b + \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}$  statt  $a$  und  $b$ , also

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} \psi(f(n)) \right| \leq \left| \sum_{a < n < \beta} \psi(f(n)) \right| + 2 < (c_1 + 2) \left( \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right).$$

I. (Ellipse.) Die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande der Ellipse

$$(5) \quad a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} \leq x$$

(wobei die Koeffizienten links unabhängig von  $x$  vorausgesetzt werden) ist

$$\frac{\pi x}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} + O(x^{\theta});$$

falls  $\lambda$  und  $\mu$  nicht beide ganz sind, ist die über die Koordinatenpaare  $u$  und  $v$  dieser Gitterpunkte erstreckte Summe

$$\sum e^{2\pi i(\lambda u + \mu v)} = O(x^{\theta}).$$

Bis jetzt waren diese Abschätzungen nur mit dem Restgliede  $O(x^{\frac{1}{2}})$  bekannt und zwar in einem Spezialfall von Herrn Sierpiński<sup>4)</sup>, allgemein von Herrn Landau<sup>5)</sup>.

II. (Sektor.) Es sei  $x > 0$ ; es werde ein Sektor, dessen Spitze im Koordinatenursprung liegt, begrenzt von zwei nicht zusammenfallenden Strecken  $v = m_1 u$  und  $v = m_2 u$ , und von einem Bogen eines Kegelschnittes

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = x;$$

hierbei wird vorausgesetzt, daß  $m_1, m_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}$  unabhängig von  $x$ , und daß  $m_1$  und  $m_2$  rational sind.

Unter diesen Voraussetzungen gilt folgende Eigenschaft: Falls die Gitterpunkte auf den zwei Strecken nur halb in Anschlag gebracht werden, dann ist die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Sektors gleich

$$c_3 x + O(x^{\theta}),$$

wo  $c_3$  unabhängig von  $x$  ist.

<sup>4)</sup> In der Arbeit: *O pewnym zagadnieniu z rachunku funkcji asymptotycznych*. [Prace matematyczno-fizyczne 17 (1906), S. 77–118] beweist Herr W. Sierpiński, daß die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Kreises  $u^2 + v^2 \leq x$ , gleich  $\pi x + O(\sqrt{x})$  ist.

<sup>5)</sup> E. Landau: *Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid)* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse (1915), S. 458–476], S. 459–461.

*Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen* [Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse 124, Abt. IIa (1915), S. 445–468], S. 445–446.

*Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* (Zweite Abhandlung) [Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse (1915), S. 209–243], S. 232–235.

Bis jetzt war diese Abschätzung nur mit dem Restgliede  $O(x^{\frac{1}{2}})$  bekannt, und zwar in einem Spezialfall von Herrn Hammerstein<sup>6)</sup>, allgemein von mir<sup>7)</sup>.

Aus I und II können folgende Eigenschaften abgeleitet werden, die bis jetzt nur mit dem Restgliede  $O(x^{\frac{1}{2}})$  statt  $O(x^{\theta})$  bekannt waren:

In jedem quadratischen Zahlkörper  $\kappa$  ist die Anzahl der Ideale einer gegebenen Klasse mit Norm  $\leq x$  gleich

$$\frac{\gamma_{\kappa} x}{h} + O(x^{\theta});$$

$h$  ist die Anzahl der Klassen des Körpers, und

$$\gamma_{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

wo  $D$  die Grundzahl des Körpers,  $\left(\frac{D}{n}\right)$  das Jacobische Symbol bezeichnet. Im Körper  $\kappa$  ist also die Anzahl der Ideale mit Norm  $\leq x$  gleich

$$\gamma_{\kappa} x + O(x^{\theta}).$$

III. (Teilerproblem). Es bezeichne  $T(n)$  die Anzahl der Teiler der positiven ganzen Zahl  $n$ ,  $\tau(x)$  die summatorische Funktion

$$\tau(x) = \sum_{n \leq x} T(n) = \sum_{n \leq x} \left[ \frac{x}{n} \right] \quad (x > 0),$$

$C$  die Eulersche Konstante, und  $\Delta(x)$  die Funktion

$$(6) \quad \Delta(x) = \tau(x) - x \log x - (2C - 1)x \quad (x > 0).$$

Über Dirichlets Ergebnis

$$\Delta(x) = O(\sqrt{x})$$

war erst Voronoï<sup>8)</sup> hinausgekommen, indem er

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

bewies. Aus Satz 2 folgt

$$(7) \quad \Delta(x) = O(x^{\theta});$$

<sup>6)</sup> A. Hammerstein: *Zwei Beiträge zur Zahlentheorie*, Inauguraldissertation (1919), Göttingen.

<sup>7)</sup> J. G. van der Corput: *Over Roosterpunten in het platte vlak (De beteekenis van de methoden van Voronoï en Pfeiffer)*, Inauguraldissertation (1919), Leiden, S. 63.

<sup>8)</sup> G. Voronoï: *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik 126 (1903), S. 241–282], S. 243.



diese Abschätzung ist schärfer als das Voronoische Resultat, aber weniger scharf als die von mir<sup>9)</sup> bewiesene Beziehung

$$\Delta(x) = O(x^{\theta'}),$$

wo  $\theta'$  eine geeignet gewählte absolute Konstante  $< \frac{33}{100}$  bezeichnet.

### Bemerkungen über die Sätze 1 und 2.

Dem Beweise von Satz 2 werden einige Bemerkungen über die Sätze 1 und 2 vorausgeschickt.

Um Satz 1 zu beweisen, habe ich<sup>10)</sup> folgende Voraussetzung eingeführt:

$$A. \left\{ \begin{array}{l} \text{Es sei } a - \frac{1}{2} \text{ und } b - \frac{1}{2} \text{ ganz, } a < b, f(u) \text{ im Intervall } a \leq u \leq b \\ \text{reell, differentiierbar}^9), f'(u) \text{ beständig wachsend oder beständig} \\ \text{abnehmend. Es sei für } a \leq u_1 < u_2 \leq b \\ (8) \quad \frac{f'(u_2) - f'(u_1)}{u_2 - u_1} \text{ stets } \geq \varrho \text{ bzw. stets } \leq -\varrho, \\ \text{wo } \varrho \text{ eine von } u_1 \text{ und } u_2 \text{ unabhängige positive Konstante } \leq 1 \\ \text{bezeichnet}^{11}). \end{array} \right.$$

Der Beweis von Satz 1 stützt sich dann auf den folgenden Satz<sup>12)</sup>:

<sup>9)</sup> J. G. van der Corput: *Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem* [Mathematische Annalen 87 (1922), S. 39–65], S. 39.

<sup>10)</sup> J. G. van der Corput: *Zahlentheoretische Abschätzungen* [Mathematische Annalen 84 (1921), S. 53–79], S. 54.

<sup>11)</sup> (8) ist z. B. erfüllt, wenn  $f''(u)$  vorhanden und beständig  $\geq \varrho$ , bzw. beständig  $\leq -\varrho$  ist; denn dann ist

$f'(u_2) - f'(u_1) = (u_2 - u_1)f''(\xi) \geq \varrho(u_2 - u_1)$ , bzw.  $\leq -\varrho(u_2 - u_1)$  ( $u_1 < \xi < u_2$ ).

<sup>12)</sup> Vgl. die in Fußnote <sup>10)</sup> genannte Arbeit S. 54 und 62. Wenn in Voraussetzung A die Bedingung, daß  $a - \frac{1}{2}$  und  $b - \frac{1}{2}$  ganz sind, fortgelassen wird, folgt aus Satz 3

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < 6 \cdot \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{\varrho}}.$$

Um diese Ungleichung zu beweisen, dürfen wir  $b - a \geq 5$  voraussetzen (da die Behauptung sonst wegen  $\varrho \leq 1$  trivial ist) und falls  $\alpha = [a + \frac{1}{2}] + \frac{1}{2}$ ,  $\beta = [b + \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}$  gesetzt wird, ist  $a < \alpha < \beta \leq b$ , so daß aus Satz 3 folgt

$$\left| \sum_{\alpha < n < \beta} e^{2\pi i f(n)} \right| < 4 \cdot \frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)| + 1}{\sqrt{\varrho}} < 4 \cdot \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{\varrho}},$$

also wegen  $2 \leq \frac{2}{\sqrt{\varrho}}$

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < 4 \cdot \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{\varrho}} + 2 \leq 6 \cdot \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{\varrho}}.$$

Satz 3. Unter Voraussetzung A ist

$$\left| \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} \right| < 4 \cdot \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{\varrho}}.$$

Es ist klar, daß man hieraus unter gewissen Bedingungen eine obere Schranke ableiten kann für die Summe

$$(9) \quad \left| \sum_{a < n < b} \psi(f(n)) \right|,$$

wenn  $\psi(v)$  in eine Fouriersche Reihe

$$(10) \quad \psi(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi i m v}$$

mit  $a_0 = 0$  entwickelbar ist, indem man in (9)  $\psi(f(n))$  mittels (10) in eine Fouriersche Reihe entwickelt, und dann Satz 3 mit  $|m| \cdot f(u)$  statt  $f(u)$  anwendet auf jedes Glied dieser Entwicklung, worin  $|m| \varrho \leq 1$  ist. Diese Methode liefert z. B. sehr genaue Abschätzungen, wenn  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m| \sqrt{|m|}$  konvergiert, aber sie führt nicht unmittelbar zum gewünschten Zweck, falls nur gegeben ist, daß  $\psi(v)$  Voraussetzung B erfüllt. Zwar ist dann  $\psi(v)$  in eine Fourierreihe (10) entwickelbar, aber vielleicht mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler Punkte, und außerdem würde die Methode divergente Reihen geben, da die Koeffizienten  $a_m$  langsam abnehmen können (aus Voraussetzung B folgt nur, daß

$$a_m = O\left(\frac{1}{|m|}\right)$$

ist). Darum betrachten wir, wenn Voraussetzung B gegeben ist, statt  $\psi(v)$  die Funktion

$$\Psi(v) = t \int_0^{\frac{1}{t}} \psi(v+y) dy,$$

wo  $t$  eine positive Zahl ist. Diese Funktion ist für jeden Wert von  $v$  in eine Fouriersche Reihe

$$\Psi(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{2\pi i m v}$$

mit  $A_0 = 0$  entwickelbar, und bei gegebenem  $t$  ist

$$A_m = O\left(\frac{1}{|m|^3}\right).$$

Die angegebene Methode ist auf  $\Psi(v)$  anwendbar und gibt dann<sup>13)</sup>

<sup>13)</sup> Eine Verallgemeinerung dieses Satzes kann der Leser in der in Fußnote <sup>10)</sup> genannten Arbeit, S. 67 finden.

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen A und B ist*

$$\left| \sum_{a < n < b} \Psi(f(n)) \right| < \frac{14\sqrt{t} \cdot |f'(b) - f'(a)| + 15}{\sqrt{e}}.$$

Mit diesem Satze kann man Satz 1 beweisen<sup>14)</sup>.

Um Satz 2 abzuleiten, müssen wir die Sätze 3 und 4 durch schärfere ersetzen. Satz 4 wird dabei ersetzt durch

Satz 5. *Falls  $R > 1$  ist, die Voraussetzungen B und D gelten, und im Intervall  $a \leq u \leq b$*

$$(11) \quad \frac{1}{2R} \leq |f''(u)| \leq \frac{1}{R}$$

ist, so hat bei geeignet gewählten  $c_4 = c_4(k)$  und  $\omega = \omega(k, \eta, \eta') > 0$  die Zahl  $t = R^{\frac{1}{2} + \omega}$  die Eigenschaft

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} \Psi(f(n)) \right| < c_4 \cdot \left( \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2} + \omega}} + \sqrt{R} \right).$$

Genau auf dieselbe Art wie Satz 1 aus Satz 4 folgt, so folgt auch Satz 2 aus Satz 5, so daß es genügt, den letzten Satz zu beweisen.

Um Satz 3 zu verschärfen, liegt es jetzt auf der Hand zu untersuchen, ob es, falls  $R > 1$  ist, und Voraussetzung D sowie (11) gelten, möglich ist, zwei höchstens nur von  $k, \eta$  und  $\eta'$  abhängige positive Zahlen  $c_5$  und  $\omega'$  zu finden mit der Eigenschaft

$$(12) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < c_5 \cdot \left( \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2} + \omega'}} + \sqrt{R} \right).$$

Es ist sehr leicht ein Gegenbeispiel zu geben. Es sei nämlich  $q > 2$  eine ganze Zahl  $\equiv 2 \pmod{4}$ ,  $s$  irgendeine ganze Zahl, und es werde gesetzt

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = sq + \frac{1}{2}, \quad f(u) = \frac{u^2}{q}, \quad R = \frac{1}{2}q, \quad \eta = \eta' = 1.$$

Dann ist  $R > 1$ ; da die linken Seiten von (2) und (3) verschwinden, gilt Voraussetzung D, und auch (11) ist erfüllt.

Bekanntlich beweist man ganz elementar

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| = \left| s \sum_{n=1}^q e^{2\pi i \frac{n^2}{q}} \right| = \begin{cases} \sqrt{2} \cdot s \sqrt{q} & \text{falls } q \equiv 0 \pmod{4}, \\ s \sqrt{q} & \text{falls } q \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

<sup>14)</sup> Denn in der in Fußnote <sup>10)</sup> erwähnten Arbeit wird auf S. 63 eine Anwendung von Satz 4 gegeben, und in der in Fußnote <sup>1)</sup> genannten Abhandlung wird Satz 1 aus dieser Anwendung abgeleitet.

also

$$(13) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \geq \epsilon \sqrt{q} = \frac{b-a}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2}}}.$$

Es ist unmittelbar klar, daß wegen  $\omega' > 0$  die Ungleichungen (12) und (13) bei geeignet gewählten  $R$  und  $b-a$  miteinander in Widerspruch sind.

Aus diesem Gegenbeispiel ergibt sich, daß Satz 3 nicht auf die genannte Art zu verschärfen ist. Die alte Methode, die sich auf Satz 3 stützt, gibt dann auch in vielen Fällen dieselben Ergebnisse wie die neue Methode, die hier entwickelt werden wird. Wenn z. B.  $f(u)$  Voraussetzung D erfüllt, und  $\psi(v)$  in die Fouriersche Reihe (10) entwickelbar ist, wobei die Konvergenz der Reihe  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m| \cdot \sqrt{|m|}$  vorausgesetzt wird, dann gibt die neue Methode bei der Abschätzung der Summe (9) dasselbe Restglied wie die alte Methode, aber die neue Methode ist eben in vielen Fällen schärfer, wo die Konvergenz der Reihe  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m| \cdot \sqrt{|m|}$  nicht vorausgesetzt wird. Einfachheit halber wird in dieser Arbeit nur der Fall betrachtet, daß  $\psi(v)$  Voraussetzung B erfüllt.

Um die neue Methode zu entwickeln, ersetzen wir Satz 3 durch den folgenden bekannten Satz<sup>13)</sup>:

Satz 6. Es sei  $a < b$ ,  $F(n)$  im Intervall  $a \leq n \leq b$  definiert, reell und dreimal differenzierbar<sup>2)</sup>,  $F''(n)$  stets positiv oder stets negativ,  $A = \min(F'(a), F'(b))$ ,  $B = \max(F'(a), F'(b))$ , so daß zu jedem  $v$  im Intervall  $A \leq v \leq B$  die Zahl  $n$ , eindeutig bestimmt ist durch die Beziehungen  $F'(n_r) = v$ ,  $a \leq n_r \leq b$ . Es sei im Intervall  $a \leq n \leq b$

$$F_2 \leq |F''(n)| \leq c_0 \cdot F_2, \quad |F'''(n)| \leq F_3,$$

wo  $F_2$ ,  $F_3$  und  $c_0$  von  $n$  unabhängig sind.

Dann gibt es eine höchstens nur von  $c_0$  abhängige Zahl  $c$ , mit der Eigenschaft

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i F(n)} - e^{\pm \frac{\pi i}{4}} \sum_{A \leq v \leq B} \frac{e^{2\pi i (F(n_r) - v n_r)}}{\sqrt{|F''(n_r)|}} \right| < c \left( \frac{1}{\sqrt{F_2}} + \log(2 + (b-a)F_2) + (b-a)\sqrt{F_2 F_3} \right);$$

hierin wird das  $+$ - oder  $-$ -Zeichen benutzt, je nachdem  $F''(n)$  stets positiv oder stets negativ ist.

Aus dem Obenstehenden folgt, daß es für den Beweis von Satz 2 hinreicht, Satz 5 aus Satz 6 abzuleiten. Wie schon in der Einleitung be-

<sup>13)</sup> Vgl. die in Fußnote \*) genannte Arbeit, S. 43.

merkt wurde, sind fast alle zur Zeit bekannten Gitterpunktabschätzungen mit Satz 2 zu verschärfen. Um auch die Gitterpunktprobleme, in denen komplexe Gewichte auftreten, bequem behandeln zu können, führen wir folgende Definition ein:

**Definition.** Es sei  $a - \frac{1}{2}$ ,  $b - \frac{1}{2}$ ,  $\gamma - \frac{1}{2}$  ganz;  $a < b$ ,  $f(u)$  im Intervall  $a \leq u \leq b$  reell, differenzierbar<sup>12)</sup> und  $\geq \gamma$ . Es sei  $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ , und im Falle  $\lambda \neq 0$  werde

$$g(u) = \frac{e^{2\pi i \lambda u}}{2i \sin \pi \lambda} \left( f(u) - \gamma + \frac{i}{2} f'(u) \cotg \pi \lambda \right) \quad (a \leq u \leq b)$$

gesetzt.

Unter diesen Voraussetzungen bezeichne  $G$  den Bereich  $a \leq u \leq b$ ,  $\gamma \leq v \leq f(u)$ ,  $A(G)$  die Summe  $\sum_{\lambda, \mu} e^{2\pi i (\lambda u + \mu v)}$ , erstreckt über die Koordinatenpaare  $u$  und  $v$  der Gitterpunkte von  $G$ , und es werde gesetzt

$$\begin{aligned} T(G) &= A(G) - \iint_G du dv && \text{falls } \lambda = \mu = 0; \\ &= A(G) - g(b) + g(a) && \text{falls } \lambda \neq 0, \mu = 0; \\ &= A(G) - \frac{ie^{2\pi i \mu \gamma}}{2 \sin \pi \mu} (b - a) && \text{falls } \lambda = 0, \mu \neq 0; \\ &= A(G) && \text{falls } \lambda \neq 0, \mu \neq 0. \end{aligned}$$

Aus Satz 3 ergibt sich nicht nur Satz 4, sondern auch der folgende allgemeinere Satz<sup>13)</sup>:

**Satz 7.** Unter den Voraussetzungen A und B ist für jedes  $t > 0$

$$t \left| \sum_{a < n < b} e^{2\pi i (\lambda n + \mu f(n))} \int_0^{\frac{1}{t}} \psi(f(n) + y) dy \right| < \frac{14 \sqrt{t} \cdot |f'(b) - f'(a)| + 15}{\sqrt{e}}.$$

Mittels dieses Satzes kann man beweisen<sup>17)</sup>:

**Satz 8.** Es sei Voraussetzung C' erfüllt; es sei  $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ ;  $a - \frac{1}{2}$ ,  $b - \frac{1}{2}$  und  $\gamma - \frac{1}{2}$  ganz,  $f(u) \geq \gamma$  im Intervall  $a \leq u \leq b$ , und es bezeichne  $G$  den Bereich  $a \leq u \leq b$ ,  $\gamma \leq v \leq f(u)$ .

Falls  $\mu = 0$  ist, gibt es eine höchstens nur von  $\lambda$  abhängige Zahl  $c_\lambda$  mit der Eigenschaft

$$|T(G)| < c_\lambda \left( \int_a^b (|f''(u)|^{\frac{1}{2}} + |f''(u)|) du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right).$$

<sup>12)</sup> Satz 7 ist die in Fußnote <sup>12)</sup> erwähnte Verallgemeinerung von Satz 4.

<sup>17)</sup> Auf S. 68 der in Fußnote <sup>12)</sup> genannten Arbeit kommt nämlich ein Satz vor, der ebendort aus Satz 7 abgeleitet worden ist, und aus diesem Satze habe ich in der in Fußnote <sup>1)</sup> genannten Abhandlung Satz 8 abgeleitet.

Falls  $\mu \neq 0$  ist, gibt es eine höchstens nur von  $\lambda$  und  $\mu$  abhängige Konstante  $c_0$  mit der Eigenschaft

$$|T(G)| < c_0 \left( \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right).$$

Diesen Satz (aus dem fast alle bis jetzt bekannten Abschätzungen für Gitterpunkte mit komplexen Gewichten abgeleitet werden können) werden wir in dieser Arbeit folgendermaßen verschärfen:

Satz 9. Wenn im vorigen Satz Voraussetzung C' durch D ersetzt wird, darf in den rechten Seiten der Behauptungen der Exponent  $\frac{1}{8}$  durch  $\frac{1}{8} + \omega$  ersetzt werden, wo  $\omega$  eine geeignet gewählte, höchstens nur von  $k$ ,  $\eta$  und  $\eta'$  abhängige positive Zahl bezeichnet; die Koeffizienten  $c_8$  und  $c_9$  werden dann ersetzt durch einen Koeffizient  $c_{10}$ , der höchstens von  $k$ ,  $\lambda$  und  $\mu$  abhängt.

Mit dieser Verschärfung kann man alle aus Satz 8 abgeleiteten Abschätzungen verbessern. Genau wie Satz 8 mittels Satz 7 bewiesen worden ist, kann man Satz 9 ableiten aus

Satz 10. Wenn die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt sind, und  $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$  ist, so hat bei geeignet gewählten  $c_{11} = c_{11}(k, \lambda, \mu)$  und  $\omega = \omega(k, \eta, \eta') > 0$  die Zahl  $t = R^{\frac{1}{2} + \omega}$  die Eigenschaft

$$(14) \quad t \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i(\lambda n + \mu f(n))} \int_0^{+\frac{1}{t}} \psi(f(n) + y) dy \right| < c_{11} \left( \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2} + \omega}} + \sqrt{R} \right).$$

Da der letzte Satz Satz 5 als Spezialfall enthält, brauchen wir nur Satz 10 zu beweisen.

#### Hilfssätze.

Um Satz 10 aus Satz 6 abzuleiten, brauchen wir verschiedene Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Es sei  $x_1 > 0$ ;  $a + 1 < b$ ,  $b - a > 3x_1^2$ ,  $f(n)$  für jedes ganze  $n$  im Intervall  $a \leq n \leq b$  definiert und reell, und es sei für jedes ganze  $g + 0$  im Intervall  $-x_1 < g < x_1$

$$(15) \quad \left| \sum_{\substack{a-g \leq n \leq b-g \\ a \leq n \leq b}} e^{2\pi i(f(n+g) - f(n))} \right| < \frac{b-a}{x_1}.$$

Dann ist

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < 4 \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_1 > 4$  voraus, da die linke Seite der letzten Ungleichung sonst  $\leq b - a + 1$

$< 2(b-a) \leq 4 \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}}$  ist. Es genügt unter der weiteren Voraussetzung daß  $a - \frac{1}{2}$  und  $b - \frac{1}{2}$  ganz sind, zu beweisen

$$(16) \quad \left| \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} \right| < 3 \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}}.$$

Denn es werde im allgemeinen Fall  $\alpha = [a + \frac{1}{2}] + \frac{1}{2}$  und  $\beta = [b + \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}$ , also  $a < \alpha \leq a+1$  und  $b-1 < \beta \leq b$  gesetzt. Wegen  $b-a > 3x_1^2 > 48$  ist  $\beta - \alpha > b-a-2 > \frac{23}{24}(b-a) > \frac{36}{49}(b-a)$ , also

$$\frac{b-a}{x_1} < \frac{\beta-\alpha}{\frac{36}{49}x_1} \quad \text{und} \quad \beta-\alpha > \frac{36}{49} \cdot 3x_1^2 > 3 \cdot \left(\frac{36}{49}x_1\right)^2,$$

so daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 mit  $\alpha$  statt  $a$ , mit  $\beta$  statt  $b$  und mit  $\frac{36}{49}x_1$  statt  $x_1$  erfüllt sind. Aus (16) folgt dann

$$\left| \sum_{\alpha < n < \beta} e^{2\pi i f(n)} \right| < 3 \cdot \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\frac{36}{49}x_1}} < \frac{7}{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}},$$

so daß wegen  $\frac{b-a}{\sqrt{x_1}} > 3x_1^{\frac{3}{2}} > 4$  die Ungleichung

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq \left| \sum_{\alpha < n < \beta} e^{2\pi i f(n)} \right| + 2 < \frac{7}{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}} = 4 \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}}$$

gilt. Hiermit ist gezeigt, daß es genügt (16) zu beweisen, unter der Voraussetzung, daß  $a - \frac{1}{2}$  und  $b - \frac{1}{2}$  ganz sind.

Es werde gesetzt

$$(17) \quad H = [x_1] + 1, \quad S_h = \sum_{n=h}^{h+H-1} e^{2\pi i f(n)} \quad (a < h < b-H+1; h \text{ ganz}).$$

Dann gilt wegen  $b-a > 3x_1^2 > 2(H-1)$  die Ungleichung

$$a+H-1 < b-H+1,$$

und es ist

$$(18) \quad \sum_{a < h < b-H+1} S_h = \sum_{a < h < b-H+1} \sum_{n=h}^{h+H-1} e^{2\pi i f(n)} = \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} \sum_h 1,$$

falls  $h$  bei gegebenem  $n$  die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft mit den Eigenschaften

$$a < h < b-H+1, \quad n-H+1 \leq h \leq n.$$

Für jedes  $n$  im Intervall  $a+H-1 < n < b-H+1$  durchläuft  $h$  genau  $H$  konsekutive Zahlen, nämlich die ganzen Zahlen des Intervalles  $n-H+1 \leq h \leq n$ ; denn dann sind auch die Ungleichungen  $a < h < b-H+1$  erfüllt. Wegen  $H > 1$  bleiben noch Zahlen  $n$  übrig, nämlich die ganzen Zahlen in den Intervallen  $a < n < a+H-1$  und  $b-H+1 < n < b$ ,

und für jedes dieser  $n$  durchläuft  $h$  eine aus mindestens einer und höchstens  $H$  konsekutiven Zahlen zusammengesetzte Reihe. Hieraus folgt

$$(19) \quad \begin{cases} \sum_h 1 = H & \text{für } a+H-1 < n < b-H+1; \\ 1 \leq \sum_h 1 \leq H & \text{für } a < n < a+H-1 \text{ und für } b-H+1 < n < b. \end{cases}$$

Wegen (17),  $b-a > 3x_1^2$  und  $x_1 > 1$  ergibt sich aus (18) und (19)

$$(20) \quad \begin{cases} \left| \sum_{a < h < b-H+1} S_h - H \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq (H-1) \left( \sum_{a < n < a+H-1} 1 + \sum_{b-H+1 < n < b} 1 \right) \\ = 2(H-1)^2 < H \cdot 2x_1 < \frac{2}{3} H \cdot \frac{b-a}{x_1} < \frac{2}{3} H \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}}. \end{cases}$$

Nach der Schwarzischen Ungleichung ist

$$(21) \quad \left| \sum_{a < h < b-H+1} S_h \right|^2 \leq (b-a) \sum_{a < h < b-H+1} |S_h|^2.$$

Wegen (17) ist

$$(22) \quad |S_h|^2 = \sum_{m=h}^{h+H-1} \sum_{n=h}^{h+H-1} e^{2\pi i (f(m)-f(n))} = \sum_{g=-H+1}^{H-1} \sum_{\substack{h-g \leq n \leq h+H-1-g}} e^{2\pi i (f(n+g)-f(n))},$$

so daß, falls

$$(23) \quad W_g = \sum_{a < h < b-H+1} \sum_{\substack{h-g \leq n \leq h+H-1-g}} e^{2\pi i (f(n+g)-f(n))}$$

gesetzt wird, aus (20), (21), (22) und (23) folgt

$$(24) \quad \left| \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} \right| < \frac{2}{3} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}} + \frac{\sqrt{b-a}}{H} \cdot \sqrt{\sum_{g=-H+1}^{H-1} |W_g|}.$$

Hierin ist wegen (23) und (17)

$$(25) \quad |W_0| = (b-H+1-a)H < \frac{b-a}{x_1} \cdot H^2.$$

Wegen (23) ist für  $g \neq 0$

$$(26) \quad W_g = \sum_{\substack{a-g < n < b-g}} e^{2\pi i (f(n+g)-f(n))} \sum_h 1,$$

falls  $h$  bei gegebenem  $n$  die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft mit den Eigenschaften

$$\frac{n-H+1}{n-H+1+g} \leq h \leq \frac{n}{n+g}$$

und

$$(27) \quad a < h < b-H+1.$$

Für jedes  $n$  im Intervall  $a+H-1 < n < b-H+1$  durchläuft  $h$  genau  $H-|g|$  konsekutive Zahlen, nämlich die ganzen Zahlen des Intervalles



$(n - H + g + 1, n)$  oder des Intervalles  $(n - H + 1, n + g)$ , je nachdem  $g$  positiv oder negativ ist; denn dann ist auch (27) erfüllt. Wegen  $H > 1$  bleiben noch Zahlen  $n$  übrig, nämlich die ganzen Zahlen in den Intervallen  $a < n < a + H - 1$  und  $b - H + 1 < n < b$ , und für jedes dieser  $n$  durchläuft  $h$  höchstens  $H - |g|$  konsekutive Zahlen. Es ist also

$$(28) \quad \begin{cases} \sum_h 1 = H - |g| \text{ für } a + H - 1 < n < b - H + 1, \\ \sum_h 1 \leq H - |g| \text{ für } a < n < a + H - 1 \text{ und für } b - H + 1 < n < b. \end{cases}$$

Aus (26) und (28) folgt für  $g \neq 0$

$$\begin{aligned} & |W_g - (H - |g|) \sum_{a-g < n < b-g} e^{2\pi i (f(n+g) - f(n))}| \\ & \leq (H - 1) \left( \sum_{a < n < a+H-1} 1 + \sum_{b-H+1 < n < b} 1 \right) = 2(H - 1) < H \cdot 2x_1 < \frac{2}{3} H \cdot \frac{b-a}{x_1}, \end{aligned}$$

also wegen (15)

$$(29) \quad |W_g| < H \cdot \frac{b-a}{x_1} + \frac{2}{3} H \cdot \frac{b-a}{x_1} = \frac{5}{3} H \cdot \frac{b-a}{x_1}.$$

Aus (24), (25) und (29) folgt

$$\left| \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} \right| < \frac{2}{3} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}} + \frac{\sqrt{b-a}}{H} \cdot \sqrt{\frac{b-a}{x_1} \cdot H^2 + \frac{10}{3} H^2 \cdot \frac{b-a}{x_1}} < 3 \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_1}}$$

wegen  $\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{13}{3}} < 3$ . Hiermit ist (16), also die Behauptung bewiesen.

**Hilfssatz 2.** Es sei  $x_2 > 0$ ,  $c_{12} > 1$ ,  $q$  ganz  $\geq 0$ ,  $a + 1 < b$ ,  $b - a > x_2$ ,  $f(u)$  im Intervall  $a \leq u \leq b$  definiert, reell und  $q + 2$  mal differenzierbar<sup>2</sup>),  $f^{(q+2)}(u)$  stets positiv oder stets negativ, und es sei

$$(30) \quad \frac{1}{c_{12}} \cdot \frac{x_2}{(b-a)^2} < |f^{(q+2)}(u)| < \frac{c_{12}}{x_2} \quad (a \leq u \leq b)$$

und

$$(31) \quad |f^{(q+2)}(u_1)| < c_{12} \cdot |f^{(q+2)}(u_2)| \quad (a \leq u_1 \leq u_2 \leq b).$$

Dann gibt es eine höchstens nur von  $c_{12}$  und  $q$  abhängige Zahl  $c_{13}$  mit der Eigenschaft

$$(32) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < c_{13} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[Q]{x_2}},$$

wo  $Q = 2^{q+2} - 2$  gesetzt worden ist.

**Bemerkung.** Von diesem Satze werden wir nur die Spezialfälle  $q = 0$  und  $q = 1$  anwenden.

Für  $q = 0$  findet man bei geeignet gewähltem, höchstens nur von  $c_{12}$  abhängigem  $c_{14}$

$$(33) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < c_{14} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_2}};$$

für  $q = 1$  findet man bei geeignet gewähltem höchstens nur von  $c_{12}$  abhängigem  $c_{15}$

$$(34) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < c_{15} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_2}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_2 > c_{12}$  und  $> 2^{\frac{1}{Q}}$  voraus, da die Behauptung sonst trivial ist. Wir werden zwei Fälle unterscheiden, je nachdem  $q = 0$  oder  $> 0$  ist.

1. Es sei  $q = 0$ . Wegen (30) und (31) gibt es eine Zahl  $\varrho$  mit den Eigenschaften

$$(35) \quad \frac{1}{c_{12}} \cdot \frac{x_2}{(b-a)^2} \leq \varrho \leq \frac{c_{12}}{x_2} < 1$$

und

$$(36) \quad \varrho \leq |f''(u)| \leq c_{12} \varrho \quad (a \leq u \leq b).$$

Voraussetzung A (wo jedoch  $a - \frac{1}{2}$  und  $b - \frac{1}{2}$  nicht ganz zu sein brauchen) ist dann erfüllt, so daß aus Satz 3 (vgl. Fußnote 12) folgt

$$(37) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < 6 \cdot \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{\varrho}},$$

und hierin ist wegen (36) und (35)

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \cdot |f'(b) - f'(a)| = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \int_a^b |f''(u)| du \leq c_{12} \sqrt{\varrho} \cdot (b-a) \leq c_{12}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_2}}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \leq c_{12}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{x_2}},$$

so daß (32) mit  $c_{13} = 6 c_{12}^{\frac{3}{2}} + 6 c_{12}^{\frac{1}{2}}$  aus (37) folgt.

2. Es sei  $q \geq 1$ , und es sei der Hilfssatz für  $q-1$  bewiesen. Für jedes  $g$  mit  $1 \leq |g| < \sqrt[Q]{x_2}$  ist im Intervall  $a-g \leq u \leq b-g$  wegen (30) und (31)

$$\frac{1}{c_{12}} \cdot \frac{x_2^{1-\frac{2}{Q}}}{(b-a)^2} < \frac{1}{c_{12}} \cdot \frac{x_2 \cdot |g|}{(b-a)^2} < |f^{(q+1)}(u+g) - f^{(q+1)}(u)| < \frac{c_{12} \cdot |g|}{x_2} < \frac{c_{12}}{x_2^{1-\frac{2}{Q}}}$$

und

$$|f^{(q+1)}(u_1+g) - f^{(q+1)}(u_1)| < c_{12} \cdot |f^{(q+1)}(u_2+g) - f^{(q+1)}(u_2)| \quad \left( a-g \leq u_1 \leq b-g \right).$$

Die Länge des betrachteten Intervalles  $\frac{a}{a-g} \leq u \leq \frac{b}{b-g}$  ist

$$b - a - |g| > x_2^{1-\frac{2}{Q}} > 1$$

wegen

$$b - a > x_2 > 2x_2^{1-\frac{2}{Q}} \quad \text{und} \quad |g| < \sqrt[Q]{x_2} < x_2^{1-\frac{2}{Q}}.$$

Die Voraussetzungen des zu beweisenden Hilfssatzes bleiben also gelten, falls  $x_2$  durch  $x_2^{1-\frac{2}{Q}}$ , das Intervall  $a \leq u \leq b$  durch das Intervall  $\frac{a}{a-g} \leq u \leq \frac{b}{b-g}$ , die Zahl  $q$  durch  $q-1$ , die Funktion  $f(u)$  durch  $f(u+g) - f(u)$  ersetzt werden. Da unser Hilfssatz für  $q-1$  bewiesen vorausgesetzt wird, gilt wegen  $2^{q+1} - 2 = \frac{1}{2}Q - 1$  bei geeignet gewähltem, höchstens nur von  $c_{12}$  und  $q$  abhängigem  $c_{16} > 1$  für jedes ganze  $q \neq 0$  im Intervall  $-\sqrt[Q]{x_2} < g < \sqrt[Q]{x_2}$  die Ungleichung

$$\left| \sum_{\frac{a}{a-g} \leq u \leq \frac{b}{b-g}} e^{2\pi i(f(u+g) - f(u))} \right| < c_{16} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[Q]{Q-1} \sqrt[Q]{x_2^{1-\frac{2}{Q}}}} = c_{16} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[Q]{x_2}}.$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind dann erfüllt mit

$$x_1 = \frac{1}{2c_{16}} \sqrt[Q]{x_2}$$

(wegen  $x_2 > 1$  und  $c_{16} > 1$  ist  $x_1 < \frac{1}{2} \sqrt[Q]{x_2}$ , also  $b-a > x_2 > 4x_1^2$ ), so daß (32) mit  $c_{13} = 4\sqrt{2}c_{16}$  bewiesen ist.

Hilfssatz 3. Es sei  $x_3 > 0$ ,  $k$  ganz  $\geq 2$ ,  $c_{17} > 0$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ ,  $M > x_3^k$ ,  $w$  reell, und

$$(38) \quad \frac{1}{c_{17}} \cdot \frac{M^{k-1}}{x_3} < |w| < c_{17} \cdot \frac{M^{k+2}}{x_3^2}.$$

Dann ist die Anzahl der ganzen Zahlen  $m$  im Intervall  $M \leq m < 2M$ , die die Ungleichung

$$(39) \quad \left| \frac{w}{(m+\mu)^{k-1}} - \left[ \frac{w}{(m+\mu)^{k-1}} + \frac{1}{2} \right] \right| \leq \frac{1}{x_3^2}$$

erfüllen, kleiner als  $c_{18} \cdot \frac{M}{x_3}$ , wo  $c_{18}$  eine geeignet gewählte, höchstens nur von  $k$  und  $c_{17}$  abhängige Zahl bezeichnet.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_3 > 2$  voraus. Es bezeichne  $n$  irgendeine ganze Zahl  $\geq 0$ , und es werde gesetzt

$$f(u) = \frac{n w}{(u+\mu)^{k-1}} \quad (M \leq u \leq 2M).$$

Wir werden zwei Fälle unterscheiden, je nachdem  $|w| \leq$  oder  $> M^k x_3^3$  ist.

1. Es sei  $|w| \leq M^k x_3^3$ . Dann ist wegen (38) und  $M > x_3^3$  im Intervall  $M \leq u \leq 2M$

$$\frac{1}{c_{17} c_{19}} \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \frac{|n|}{x_3} < \frac{1}{c_{19}} \cdot \frac{|nw|}{M^{k+1}} < |f''(u)| < c_{19} \frac{|nw|}{M^{k+1}} < c_{19} \cdot \frac{|n|}{x_3^3}$$

und

$$|f''(u_1)| < c_{20} |f''(u_2)| \quad (M \leq \frac{u_1}{u_2} \leq 2M);$$

hierin bezeichnen  $c_{19}$  und  $c_{20}$  (desgl.  $c_{21}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{24}$ ,  $c_{25}$ ,  $c_{26}$  und  $c_{27}$  nachher) geeignet gewählte, höchstens nur von  $k$  und  $c_{17}$  abhängige Zahlen.

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 sind in diesem Falle erfüllt mit

$$q = 0; \quad a = M; \quad b = 2M;$$

$$x_2 = \text{Min} \left( \frac{|n|}{x_3}, \frac{x_3^3}{|n|} \right); \quad c_{12} = \text{Max} (c_{19}, c_{17} c_{19}, c_{20});$$

denn es ist

$$c_{12} \geq c_{20} > 1 \quad \text{und} \quad b - a = M > x_3^k > x_3^3 \geq x_2.$$

Aus (33) folgt dann

$$(40) \quad \left| \sum_{M \leq m \leq 2M} e^{2\pi i f(m)} \right| < c_{21} M \left( \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{|n|}} + \frac{\sqrt{|n|}}{x_2^3 \sqrt{x_2}} \right).$$

2. Es sei  $M^k x_3^3 < |w|$ . Dann ist wegen (38) im Intervall  $M \leq u \leq 2M$

$$\frac{1}{c_{22}} \cdot \frac{1}{M^2} \cdot |n| x_3^3 < \frac{1}{c_{22}} \cdot \frac{|nw|}{M^{k+2}} < |f'''(u)| < c_{22} \frac{|nw|}{M^{k+2}} < c_{17} c_{22} \cdot \frac{|n|}{x_3^3}$$

und

$$|f'''(u_1)| < c_{23} \cdot |f'''(u_2)| \quad (M \leq \frac{u_1}{u_2} \leq 2M).$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 sind in diesem Falle erfüllt mit

$$q = 1; \quad a = M; \quad b = 2M;$$

$$x_2 = \text{Min} \left( |n| x_3^3, \frac{x_3^3}{|n|} \right); \quad c_{12} = \text{Max} (c_{22}, c_{17} c_{22}, c_{23});$$

denn es ist

$$c_{12} \geq c_{23} > 1 \quad \text{und} \quad b - a = M > x_3^k > x_3^3 \geq x_2.$$

Aus (34) folgt dann

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{M \leq m \leq 2M} e^{2\pi i f(m)} \right| < c_{24} M \left( \frac{1}{\sqrt{x_2} \cdot \sqrt[6]{|n|}} + \frac{\sqrt[6]{|n|}}{x_2^3 \sqrt{x_2}} \right) \\ < 2 c_{24} M \left( \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{|n|}} + \frac{\sqrt{|n|}}{x_2^3 \sqrt{x_2}} \right). \end{array} \right.$$

Aus (40) und (41) folgt, daß stets die Ungleichung

$$(42) \quad \left| \sum_{M \leq m \leq 2M} e^{2\pi i f(m)} \right| < c_{25} M \left( \frac{\sqrt{x_3}}{\sqrt{|n|}} + \frac{\sqrt{|n|}}{x_3^2 \sqrt{x_3}} \right)$$

gilt.

Es werde jetzt die Funktion  $\chi(v)$  folgendermaßen definiert: Es habe die Funktion  $\chi(v)$  die Periode 1; es sei  $\chi(-v) = \chi(v)$ , und  $\chi(0) = 2$ ; es sei  $\chi(v) = 0$  im Intervall  $\frac{2}{x_3} \leq v \leq \frac{1}{2}$ , und es sei  $\chi(v)$  im Intervall  $0 \leq v \leq \frac{2}{x_3}$  eine lineare Funktion von  $v$  (also  $\chi'(v) = -x_3^3$ ). Dann ist

$$(43) \quad \chi(v) = \frac{4}{x_3^3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi v,$$

mit

$$a_n = \int_0^{\frac{2}{x_3}} \chi(v) \cos 2n\pi v dv = \frac{x_3^3}{2n\pi} \int_0^{\frac{2}{x_3}} \sin 2n\pi v dv = -\frac{x_3^3}{4n^2\pi^2} (1 - \cos \frac{4n\pi}{x_3^3}),$$

also wegen  $0 \leq \chi(v) \leq 2$

$$(44) \quad 0 \leq a_n \leq \frac{4}{x_3^3} \quad \text{und} \quad \leq \frac{x_3^3}{2n^2\pi^2}.$$

Aus (43), (44) und (42) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{M \leq m \leq 2M} \chi\left(\frac{w}{(m+\mu)^{k-1}}\right) &\leq \frac{4}{x_3^3} \cdot 2M + 2 \sum_{\substack{n=-x \\ n \neq 0}}^x \text{Min}\left(\frac{4}{x_3^3}, \frac{x_3^3}{2n^2\pi^2}\right) \cdot \left| \sum_{M \leq m \leq 2M} e^{\frac{2\pi i w n}{(m+\mu)^{k-1}}} \right| \\ &< \frac{8M}{x_3^3} + c_{26} M \sum_{\substack{n=-x \\ n \neq 0}}^x \left( \frac{\sqrt{x_3}}{\sqrt{|n|}} + \frac{\sqrt{|n|}}{x_3^2 \sqrt{x_3}} \right) \cdot \text{Min}\left(\frac{1}{x_3^3}, \frac{x_3^3}{n^2}\right) \\ &< c_{27} \cdot \frac{M}{x_3}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der ganzen Zahlen  $m$  im Intervall  $M \leq m < 2M$ , für die (39) gilt, ist höchstens gleich der Summe  $\sum_{M \leq m \leq 2M} \chi\left(\frac{w}{(m+\mu)^{k+1}}\right)$  (also  $< c_{27} \cdot \frac{M}{x_3}$ ); denn für diese  $m$  ist  $\chi\left(\frac{w}{(m+\mu)^{k-1}}\right) \geq 1$ , und es ist stets  $\chi(v) \geq 0$ . Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 4. Es sei  $x_4 > 0$ ,  $a + 1 < b$ ,  $b - a > x_4^2$ ,  $k$  ganz  $\geq 1$ ; es seien  $w_0, w_1, \dots, w_k$  reell und für jedes ganze  $h \neq 0$  im Intervall  $-x_4^2 < h < x_4^2$  sei

$$(45) \quad \left| h w_0 - \left[ h w_0 + \frac{1}{2} \right] \right| > \frac{x_4}{b-a}.$$

Dann besitzt das Polynom

$$f(n) = \sum_{q=0}^k \frac{w_q}{(k-q)!} n^{k-q}$$

die Eigenschaft

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| < c_{28} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[k]{x_4}};$$

hierin ist  $c_{28}$  eine geeignet gewählte, höchstens nur von  $k$  abhängige Zahl, und  $K$  bezeichnet die Zahl  $2^{k-1}$ .

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_4 > 4$  voraus, da die Behauptung sonst trivial ist. Wir werden zwei Fälle unterscheiden, je nachdem  $k = 1$  oder  $> 1$  ist.

1. Es sei  $k = 1$ . Da (45) für  $h = 1$  gilt, ist

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| = \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i n w_0} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi w_0|} \leq \frac{1}{2|w_0 - [w_0 + \frac{1}{2}]|} < \frac{1}{2} \frac{b-a}{x_4}.$$

2. Es sei  $k > 1$ , und es sei unser Hilfssatz für  $k-1$  bewiesen. Für jedes ganze  $g \neq 0$  im Intervall  $-\frac{1}{4}x_4 < g < \frac{1}{4}x_4$  ist

$$f(n+g) - f(n) = \sum_{q=0}^{k-1} \frac{\bar{w}_q}{(k-1-q)!} n^{k-1-q} \quad \text{mit} \quad \bar{w}_0 = g w_0,$$

und falls dann  $m$  irgendeine ganze Zahl  $\neq 0$  im Intervall  $-(\frac{1}{4}x)^{k-1} < m < (\frac{1}{4}x)^{k-1}$  bezeichnet, dann ist  $h = mg$  eine ganze Zahl  $\neq 0$  im Intervall  $-(\frac{1}{4}x)^k < h < (\frac{1}{4}x)^k$ , so daß (45) gilt, woraus folgt

$$\left| m \bar{w}_0 - \left[ m \bar{w}_0 + \frac{1}{2} \right] \right| > \frac{x_4}{b-a} > \frac{\frac{1}{4}x_4}{b-a-|g|}.$$

Die Länge des Intervalls  $\frac{a}{a-g} \leq u \leq \frac{b}{b-g}$  ist wegen  $b-a > x_4^2$  und  $|g| < \frac{x_4}{4}$

$$b-a-|g| > \left(\frac{x_4}{4}\right)^2 > 1,$$

so daß die Voraussetzungen des zu beweisenden Hilfssatzes mit  $\frac{1}{4}x_4$  statt  $x_4$ , mit dem Intervall  $\frac{a}{a-g} \leq u \leq \frac{b}{b-g}$  statt  $a \leq u \leq b$ , mit  $k-1$  statt  $k$ , und mit  $f(n+g) - f(n)$  statt  $f(n)$  erfüllt sind. Da unser Hilfssatz für  $k-1$  bewiesen vorausgesetzt wird, ist bei geeignet gewähltem  $c_{29} = c_{29}(k) > 4$

$$\left| \sum_{\frac{a}{a-g} \leq n \leq \frac{b}{b-g}} e^{2\pi i (f(n+g) - f(n))} \right| < c_{29} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[k]{x_4}}.$$

Falls

$$x_4 = \frac{1}{c_{29}} \sqrt[k]{K}$$

gesetzt wird, gelten wegen  $c_{20} > 4$  und  $\frac{1}{2}K \geq 1$  die Ungleichungen  $x_1 < \frac{1}{4}x_4$  und  $b - a > x_1^2 > 3x_1^2$ , so daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt sind, und hieraus folgt die Behauptung mit  $c_{20} = 4\sqrt{c_{20}}$ .

Hilfssatz 5. Es sei  $x_h > 1$ ,  $k$  ganz  $\geq 2$ ,  $c_{20} > 0$ ,  $M > x_h^3$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ ; es sei  $f_h(m)$  ( $0 \leq h \leq k-1$ ) für jedes ganze  $m$  im Intervall  $M \leq m < 2M$  definiert und reell, und es werde gesetzt

$$f(m, n) = \frac{w}{k!} \cdot \frac{n^k}{(m+\mu)^{k-1}} + \sum_{h=0}^{k-1} f_h(m) \cdot n^h,$$

wo  $w$  unabhängig von  $m$  und  $n$  ist, und die Ungleichung

$$(46) \quad \frac{1}{c_{20}} \cdot \frac{M^{k-1}}{x_h} < |w| < c_{20} \cdot \frac{M^{k+3}}{x_h^{20}}$$

erfüllt. Es werde gesetzt  $K = 2^{k-1}$ .

Schließlich gebe es zu jedem ganzen  $m$  im Intervall  $M \leq m < 2M$  zwei Zahlen  $\gamma_m$  und  $\delta_m$  mit der Eigenschaft  $0 < \delta_m - \gamma_m \leq z$ , wo  $z$  eine von  $m$  unabhängige Zahl ist, und die Ungleichung

$$(47) \quad z > \frac{1}{c_{20}} \cdot x_h^{3 + \frac{K}{Kk+1}}$$

erfüllt.

Dann gibt es eine höchstens nur von  $k$  und  $c_{20}$  abhängige Zahl  $c_{21}$  mit der Eigenschaft

$$(48) \quad \sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\gamma_m \leq n \leq \delta_m} e^{2\pi i f(m, n)} \right| < c_{21} \cdot \frac{Mz}{\sqrt{x_h}^{Kk+1}}.$$

Beweis. Es werde  $x_h = x_h^{\frac{K}{Kk+1}}$  gesetzt; ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_h > \sqrt{c_{20}}$  voraus. Wir werden die ganzen Zahlen  $m$  im Intervall  $M \leq m < 2M$  in drei Gruppen (von denen eine oder zwei leer sein können) zerlegen, und zwar auf diese Art: die erste Gruppe enthält die ganzen Zahlen  $m$  (und nur diese) im Intervall  $M \leq m < 2M$ , für die es wenigstens eine ganze Zahl  $h \neq 0$  im Intervall  $-x_h^2 < h < x_h^2$  gibt mit der Eigenschaft

$$(49) \quad \left| \frac{hw}{(m+\mu)^{k-1}} - \left[ \frac{hw}{(m+\mu)^{k-1}} + \frac{1}{2} \right] \right| \leq \frac{1}{x_h^3};$$

die zweite Gruppe enthält die nicht zur ersten Gruppe gehörigen  $m$  mit der Eigenschaft

$$(50) \quad \delta_m - \gamma_m \geq \frac{z}{\sqrt{x_h}^{Kk+1}},$$

und die dritte Gruppe enthält die übrigen im Intervall  $M \leq m < 2M$  liegenden ganzen Zahlen.

Wir werden zuerst die erste Gruppe untersuchen. Falls  $h$  eine ganze Zahl  $\neq 0$  im Intervall  $-x_0^k < h < x_0^k$  bezeichnet, ist wegen (46)

$$\frac{1}{c_{30}} \cdot \frac{M^{k-1}}{x_0} < |h| \cdot |w| < c_{30} \cdot \frac{M^{k+2}}{x_0^3},$$

so daß es nach Hilfssatz 3 mit  $x_3 = x_0$ ,  $c_{17} = c_{30}$  und mit  $hw$  statt  $w$  im Intervall  $M \leq m < 2M$  bei gegebenem  $h$  höchstens  $c_{32} \cdot \frac{M}{x_3}$  ganze Zahlen  $m$  gibt, für die (49) gilt; hierin ist  $c_{32}$  (desgl.  $c_{33}$  nachher) eine geeignet gewählte Zahl, die höchstens nur von  $k$  und  $c_{30}$  abhängt. Da es im Intervall  $-x_0^k < h < x_0^k$  höchstens  $2x_0^k$  ganze Zahlen  $\neq 0$  gibt, enthält die erste Gruppe höchstens

$$2x_0^k \cdot c_{32} \frac{M}{x_3} = 2c_{32} \cdot \frac{M}{\sqrt[k]{x_3}}$$

Zahlen, so daß der Beitrag der zur ersten Gruppe gehörigen  $m$  in die linke Seite von (48) wegen (47) höchstens

$$2c_{32} \cdot \frac{M(z+1)}{\sqrt[k]{x_3}} < 2(c_{32} + c_{30}) \frac{Mz}{\sqrt[k]{x_3}}$$

beträgt.

Jede Zahl  $m$  der zweiten Gruppe hat die Eigenschaft, daß für jedes ganze  $h \neq 0$  im Intervall  $-x_0^k < h < x_0^k$  die linke Seite von (49) größer als  $\frac{1}{x_3}$ , also wegen (47) und (50) größer als

$$\frac{1}{c_{30}} \cdot \frac{x_3^{\frac{K}{Kk+1}}}{z} \geq \frac{1}{c_{30}} \cdot \frac{x_0}{\delta_m - \gamma_m}$$

ist. Dann ist wegen (47) und (50)

$$\delta_m - \gamma_m > \left( \frac{x_0}{\sqrt[k]{c_{30}}} \right)^2 > 1,$$

so daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 mit

$$x_1 = x_0 \cdot \text{Min} \left( \frac{1}{c_{30}}, 1 \right), \quad a = \gamma_m, \quad b = \delta_m, \quad f(n) = f(m, n), \quad w_0 = \frac{w}{(m+\mu)^{k+1}}$$

erfüllt sind. Nach Hilfssatz 4 ist dann für jedes  $m$  der zweiten Gruppe

$$\left| \sum_{n \leq \gamma_m} e^{2\pi i f(m, n)} \right| < c_{33} \cdot \frac{z}{\sqrt[k]{x_0}} = c_{33} \cdot \frac{z}{\sqrt[k]{x_3}},$$



so daß der Beitrag der zur zweiten Gruppe gehörigen  $m$  in die linke Seite von (48) höchstens

$$2c_{33} \cdot \frac{Mx}{\frac{Kk+1}{\sqrt{x_3}}}$$

ist.

Für die Zahlen  $m$  der dritten Gruppe ist

$$\delta_m - \gamma_m + 1 < (1 + c_{30}) \frac{x}{\frac{Kk+1}{\sqrt{x_3}}},$$

also der Beitrag der zur dritten Gruppe gehörigen  $m$  ist kleiner als

$$2(1 + c_{30}) \frac{Mx}{\frac{Kk+1}{\sqrt{x_3}}}.$$

Aus dem Obenstehenden folgt (48) mit  $c_{31} = 2(c_{33} + c_{30}) + 2c_{33} + 2(1 + c_{30})$ .

Hilfssatz 6. Es sei  $h$  ganz  $\geq 1$ ,  $M > 0$ ,  $N > 0$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $M(\beta - \alpha) > 1$ ,  $P(\sigma)$  ein Polynom  $h^{\text{ten}}$  Grades mit reellen Koeffizienten, und es sei im Intervall  $\alpha \leq \sigma \leq \beta$

$$(51) \quad |P(\sigma)| \leq N.$$

Dann ist der Koeffizient von  $\sigma^h$  im Polynom  $P(\sigma)$  absolut genommen höchstens  $\frac{2}{h!} N \cdot (2hM)^h$ .

Beweis. Für jedes positive ganze  $q \leq h$  ist

$$(52) \quad \frac{q}{1! h^1 M^1} \cdot P'(\alpha) + \frac{q^2}{2! h^2 M^2} \cdot P''(\alpha) + \dots + \frac{q^h}{h! h^h M^h} \cdot P^{(h)}(\alpha) = P\left(\alpha + \frac{q}{hM}\right) - P(\alpha),$$

und diese Differenz ist wegen (51) absolut  $\leq 2N$ .

Wir multiplizieren beide Seiten von (52) mit  $(-1)^q \cdot \binom{h}{q}$ , und addieren die  $h$  verschiedenen auf diese Art gefundenen Beziehungen ( $q = 1, 2, \dots, h$ ). Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^h (-1)^q \cdot \binom{h}{q} \cdot q^r &= 0 && \text{falls } r < h, \\ &= (-1)^h h! && \text{falls } r = h, \end{aligned}$$

findet man

$$\frac{1}{h^h M^h} \cdot |P^{(h)}(\alpha)| \leq \sum_{q=1}^h \binom{h}{q} \cdot 2N < 2^{h+1} N,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist, da der Koeffizient von  $\sigma^h$  im Polynom  $P(\sigma)$  den Absolutwert  $\frac{1}{h!} |P^{(h)}(\alpha)|$  besitzt.

Hilfssatz 7. Es sei  $x_7 > 1$ ,  $k$  ganz  $\geq 2$ ,  $c_{34} > 1$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $M > x_7^{\frac{11}{7}}$ ,

$$(53) \quad M(\beta - \alpha) > x_7^{\frac{44}{13}},$$

$\varphi(\sigma)$  im Intervall  $\alpha \leq \sigma \leq \beta$  reell,  $k+1$ -mal differenzierbar<sup>2)</sup>, und es sei im Intervall  $\alpha \leq \sigma \leq \beta$

$$(54) \quad \frac{1}{c_{34}} \cdot M < |\varphi''(\sigma)| < c_{34} \cdot \frac{M^2}{x_7^2}, \quad |\varphi^{(k+1)}(\sigma)| \leq c_{34} \cdot \frac{M^k}{x_7}.$$

Zu jedem ganzen  $m$  im Intervalle  $M \leq m < 2M$  gebe es zwei Zahlen  $\gamma_m$  und  $\delta_m$  mit der Eigenschaft

$$\lambda + (m + \mu)\alpha \leq \gamma_m < \delta_m \leq \lambda + (m + \mu)\beta.$$

Es werde schließlich

$$(55) \quad p_1 = 5 \quad p_h = \frac{44}{13}(h+1)p_{h-1} + 1 \quad (h = 2, 3, \dots)$$

gesetzt.

Dann gibt es eine höchstens nur von  $k$  und  $c_{34}$  abhängige Zahl  $c_{35}$  mit der Eigenschaft

$$(56) \quad \sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\gamma_m \leq n \leq \delta_m} e^{2\pi i(m+\mu)\varphi\left(\frac{n-\lambda}{m+\mu}\right)} \right| < c_{35} \cdot \frac{(\beta - \alpha) M^2}{p_h \sqrt{x_7}}.$$

Falls  $\varphi(\sigma)$  ein Polynom  $k$ ten Grades ist, gibt es sogar eine höchstens nur von  $k$  abhängige Zahl  $c_{36}$  mit der Eigenschaft

$$(57) \quad \sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\gamma_m \leq n \leq \delta_m} e^{2\pi i(m+\mu)\varphi\left(\frac{n-\lambda}{m+\mu}\right)} \right| < c_{36} \cdot \frac{(\beta - \alpha) M^2}{p_{k-1} \sqrt{x_7}}.$$

Beweis. Wir werden den Beweis in zwei Teile zerlegen; im ersten Teil leiten wir (56) aus (57) ab und im zweiten Teil zeigen wir, daß der Hilfssatz hiermit allgemein bewiesen ist.

I. Es sei (57) bewiesen, und (56) zu beweisen. Es werde

$$(58) \quad x_8 = x_7^{\frac{44 p_h - 1}{44(k+1)p_{h-1} + 13}}$$

gesetzt. Beim Beweis von (56) darf man (53) ersetzen durch

$$(59) \quad x_8 < M(\beta - \alpha) \leq 2x_8;$$

denn man kann wegen  $x_8 < x_7$  das Intervall  $(\alpha, \beta)$  in Teilintervalle  $(\alpha', \beta')$  zerlegen, deren Länge  $> \frac{x_8}{M}$  und  $\leq \frac{2x_8}{M}$  ist, und wenn (56) mit  $(\alpha', \beta')$  statt  $(\alpha, \beta)$  gilt, dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\gamma_m \leq n \leq \delta_m} e^{2\pi i(m+\mu)\varphi\left(\frac{n-\lambda}{m+\mu}\right)} \right| &< c_{35} \cdot \frac{M^2}{p_h \sqrt{x_7}} \Sigma(\beta' - \alpha') \\ &= c_{35} \cdot \frac{M^2}{p_h \sqrt{x_7}} \cdot (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Es werde gesetzt

$$P(\sigma) = \varphi(\alpha) + \frac{\sigma - \alpha}{1!} \varphi'(\alpha) + \dots + \frac{(\sigma - \alpha)^k}{k!} \varphi^{(k)}(\alpha) \quad (\alpha \leq \sigma \leq \beta).$$

Wegen (54) und (59) ist im Intervall  $\alpha \leq \sigma \leq \beta$

$$\begin{aligned} |P(\sigma) - \varphi(\sigma)| &\leq \frac{(\beta - \alpha)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot c_{34} \frac{M^k}{x_7} \\ &\leq \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot c_{34} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{x_7^{k+1}}{x_7} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot c_{34} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_7}}, \end{aligned}$$

denn wegen (55) ist

$$1 - \frac{44(k+1)p_{k-1}}{44(k+1)p_{k-1} + 13} = \frac{13}{44(k+1)p_{k-1} + 13} = \frac{1}{p_k}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i(m+\mu)} P(\sigma) - e^{2\pi i(m+\mu)} \varphi(\sigma)| &= 2 |\sin \pi(m+\mu) \cdot (P(\sigma) - \varphi(\sigma))| \\ &\leq 2\pi \cdot 3M \cdot \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot c_{34} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_7}} = \frac{c_{37}}{\sqrt{x_7}}; \end{aligned}$$

hierin bezeichnet  $c_{37}$  (desgl.  $c_{35}$  und  $c_{39}$  nachher) eine geeignet gewählte, höchstens nur von  $k$  und  $c_{34}$  abhängige Zahl. Es ist also

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\gamma_m \leq m \leq \delta_m} (e^{2\pi i(m+\mu)} \varphi\left(\frac{n-1}{m+\mu}\right) - e^{2\pi i(m+\mu)} P\left(\frac{n-1}{m+\mu}\right)) \right| \\ \leq \frac{c_{37}}{\sqrt{x_7}} \sum_{M \leq m < 2M} (\delta_m - \gamma_m + 1) < 8c_{37} \cdot \frac{(\beta - \alpha) M^2}{\sqrt{x_7}} \end{aligned} \right.$$

wegen

$$\delta_m - \gamma_m + 1 \leq (m + \mu) \cdot (\beta - \alpha) + 1 < 3M \cdot (\beta - \alpha) + M \cdot (\beta - \alpha) = 4M \cdot (\beta - \alpha).$$

Nach der Definition von  $P(\sigma)$ , wegen der letzten der Ungleichungen (54) und wegen (59) ist im Intervall  $\alpha \leq \sigma \leq \beta$

$$|P''(\sigma) - \varphi''(\sigma)| \leq \frac{(\beta - \alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot c_{34} \frac{M^k}{x_7} \leq \frac{2^{k-1} c_{34}}{(k-1)!} \cdot M \cdot \frac{x_7^{k-1}}{x_7}.$$

Da

$$\frac{x_7^{k-1}}{x_7} \leq \frac{x_7^{\frac{k-1}{2}}}{x_7} = \frac{1}{x_7^{\frac{k+1}{2}}}$$

ist, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x$  hinreichend groß gewählt werden kann, dürfen wir

$$\frac{2^{k-1} c_{34}}{(k-1)!} \cdot \frac{x_7^{k-1}}{x_7} < \frac{1}{2c_{34}}$$

voraussetzen, und dann ist

$$(61) \quad |P''(\sigma) - \varphi''(\sigma)| < \frac{M}{2c_{34}},$$

also wegen (54)

$$(62) \quad |P''(\sigma)| > \frac{M}{2c_{34}}.$$

Wegen  $c_{34} > 1$  und  $M > x_7^8$  ergibt sich aus (61)

$$|P''(\sigma) - \varphi''(\sigma)| < c_{34} M < c_{34} \cdot \frac{M^4}{x_7^{10}},$$

also aus (54) und (58)

$$(63) \quad |P''(\sigma)| < 2c_{34} \cdot \frac{M^4}{x_7^{10}} < 2c_{34} \cdot \frac{M^4}{x_8^{44} \cdot 10}.$$

Wegen (59), (62) und (63) sind die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes mit  $P(\sigma)$  statt  $\varphi(\sigma)$ , mit  $x_8^{44}$  statt  $x_7$ , mit  $2c_{34}$  statt  $c_{34}$  erfüllt, und da (57) bewiesen vorausgesetzt wird, ist

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\gamma_m \leq n \leq \delta_m} e^{2\pi i(m+\mu)P\left(\frac{n-k}{m+\mu}\right)} \right| &< 2c_{36} \cdot \frac{(\beta-\alpha)M^2}{p_{k-1} \sqrt{\frac{13}{x_8^{44}}}} \\ &= 2c_{36} \cdot \frac{(\beta-\alpha)M^2}{p_k \sqrt{x_7}}; \end{aligned} \right.$$

denn wegen (55) ist

$$\frac{1}{p_{k-1}} \cdot \frac{13}{44} \cdot \frac{44 p_{k-1}}{44(k+1)p_{k-1} + 13} = \frac{1}{p_k}.$$

Aus (60) und (64) folgt (56) mit  $c_{35} = 8c_{34} + 2c_{36}$ . Hiermit ist Teil I erledigt.

II. Um jetzt den Hilfssatz allgemein zu beweisen, werden wir verschiedene Fälle unterscheiden.

1. Es sei  $\varphi(\sigma)$  ein Polynom zweiten Grades. Dann sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 5 mit

$x_3 = x_7$ ,  $k = 2$ ,  $c_{30} = c_{34}$ ,  $z = 3M \cdot (\beta - \alpha)$ ,  $f(m, n) = (m + \mu) \varphi\left(\frac{n-k}{m+\mu}\right)$  erfüllt, da (46) aus (54) und (47) wegen  $c_{30} > 1$  aus (53) folgt. Da in diesem Falle  $Kk + 1 = 5 = p_1$  ist, folgt dann (57) aus (48).

2. Es sei  $\varphi(\sigma)$  eine beliebige Funktion, die die Voraussetzungen des Hilfssatzes mit  $k = 2$  erfüllt. Da (57) nach 1. für jedes Polynom zweiten Grades gilt, gilt noch Teil I Ungleichung (56) für jede Funktion, die die Voraussetzungen des Hilfssatzes mit  $k = 2$  erfüllt, so daß der Hilfssatz für  $k = 2$  bewiesen ist.

3. Es sei  $k \geq 3$ ; es sei  $\varphi(\sigma)$  ein Polynom  $k$ -ten Grades, und es sei unser Hilfssatz für  $k-1$  bewiesen. Es bezeichne  $\frac{w}{k!}$  den Koeffizienten von  $\sigma^k$  im Polynom  $\varphi(\sigma)$ .

Falls

$$|w| \leq c_{34} \cdot \frac{M^{k-1}}{x_7}$$

ist, dann sind die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes mit  $k$  statt  $k-1$  erfüllt, und da der Hilfssatz für  $k-1$  bewiesen vorausgesetzt wird, ist

$$\sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\gamma_m \leq n \leq \delta_m} e^{2\pi i(m+\mu)\varphi\left(\frac{n-\lambda}{m+\mu}\right)} \right| < c_{38} \cdot \frac{(\beta-\alpha) \cdot M^2}{p_{k-1} \sqrt{x_7}}.$$

Wir dürfen also

$$(65) \quad |w| > c_{34} \cdot \frac{M^{k-1}}{x_7}$$

annehmen. Wegen (53) ist  $M(\beta-\alpha) > 1$ , so daß wegen (54) die Voraussetzungen von Hilfssatz 6 mit

$$P(\sigma) = \varphi''(\sigma), \quad h = k-2, \quad N = c_{34} \cdot \frac{M^4}{x_7^{10}}$$

erfüllt sind. Nach Hilfssatz 6 ist

$$(66) \quad |w| < c_{39} \cdot \frac{M^{k+3}}{x_7^{10}} \quad \text{mit} \quad c_{39} = 2c_{34} \cdot (2k-4)^{k-2}.$$

Aus (65) und (66) folgt, daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 5 mit

$$x_5 = x_7, \quad z = 3M \cdot (\beta-\alpha), \quad f(m, n) = (m+\mu)\varphi\left(\frac{n-\lambda}{m+\mu}\right),$$

$$c_{30} = \text{Max}\left(\frac{1}{c_{31}}, c_{39}\right)$$

erfüllt sind; denn dann ist  $c_{30} > 1$ , also wegen (53),  $x_7 > 1$  und  $k \geq 3$

$$z > x_7^{\frac{44}{13}} > \frac{1}{c_{30}} \cdot x_7^{\frac{3+K}{K+1}}.$$

Wegen  $Kk+1 < p_{k-1}$  folgt (57) aus Hilfssatz 5, so daß (57) vollständig bewiesen ist.

4. Da (57) gilt, folgt aus Teil I, daß auch (56) allgemein gilt.

### Beweis von Satz 10.

Wir werden (14) mit

$$(67) \quad \omega = \text{Min}\left(\frac{1}{3(15p_k+8)}, \frac{2\eta}{3p_k+4k}, \frac{\eta'}{7}\right)$$

beweisen, wo  $p_k$  durch (55) definiert worden ist. In diesem Beweise bezeichnen

$$c_{40}, c_{41}, \dots, c_{33}$$

geeignet gewählte Zahlen, die höchstens nur von  $k$  abhängen dürfen.

Überall mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler Punkte  $v$  ist  $\psi(v)$  in eine Fouriersche Reihe

$$(68) \quad \psi(v) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_m e^{2\pi i v} \quad \text{mit} \quad a_m = \int_0^1 e^{-2\pi i v} \psi(v) dv$$

entwickelbar. Wegen der Monotonie von  $\psi(v)$  im Intervall  $0 < v < 1$  ist wegen (68) und wegen  $|\psi(v)| \leq 1$

$$(69) \quad |a_m| \leq \frac{1}{2|m|\pi} \cdot 2\sqrt{2} < \frac{1}{|m|}.$$

Außerdem ist für jedes  $v$  wegen (68)

$$\pm \frac{1}{t} \int_0^t \psi(v+y) dy = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{2\pi i v}$$

mit

$$A_m = a_m \pm \frac{1}{t} \int_0^t e^{2\pi i v} dy,$$

also wegen (69)

$$|A_m| \leq |a_m| < \frac{1}{|m|} \quad \text{und} \quad |A_m| \leq |a_m| \cdot t \cdot \frac{2}{2|m|\pi} < \frac{t}{m^2},$$

so daß die linke Seite von (14) nicht größer ist als

$$(70) \quad \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \text{Min} \left( \frac{1}{|m|}, \frac{t}{m^2} \right) \cdot \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i \{ (\lambda n + (m+\mu) f(n)) \}} \right|.$$

Es werde gesetzt

$$\alpha = \text{Min}(f'(a), f'(b)) \quad \beta = \text{Max}(f'(a), f'(b));$$

$$\text{oder} \quad \alpha_m = \lambda + (m + \mu)\alpha \quad \text{und} \quad \beta_m = \lambda + (m + \mu)\beta$$

$$\alpha_m = \lambda + (m + \mu)\beta \quad \text{und} \quad \beta_m = \lambda + (m + \mu)\alpha,$$

je nachdem die ganze Zahl  $m$  (und also auch  $m + \mu$ ) positiv oder negativ ist; es ist also  $\alpha < \beta$  und  $\alpha_m < \beta_m$ .

Es werde jetzt Satz 6 angewandt mit

$$F(u) = \lambda u + (m + \mu)f(u); \quad A = \alpha_m; \quad B = \beta_m; \quad F_2 = \frac{|m + \mu|}{2R}; \quad c_7 = 2.$$

Wegen (2), (11) und (67) ist

$$|f'''(u)| \leq |f''(u)|^{\frac{1}{2} + \omega'} \leq R^{-(1 + 7\omega)},$$

so daß

$$F_3 = \frac{|m + \mu|}{R^{\frac{1}{2} + 7\omega}}$$

gesetzt werden darf. Nach Satz 6 ist dann

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \neq 0}} e^{2\pi i(\lambda n + (m+\mu)f(n))} - e^{\pm \frac{\pi i}{4}} \sum_{\alpha_m \leq \nu \leq \beta_m} \frac{e^{2\pi i((\lambda-\nu)n_\nu + (m+\mu)f(n_\nu))}}{V|m+\mu| \cdot |f''(n_\nu)|} \right| \\ & < c_{10} \cdot \left( \frac{\sqrt{2R}}{\sqrt{|m+\mu|}} + \log \left( 2 + \frac{(b-a) \cdot |m+\mu|}{2R} \right) + (b-a) \sqrt{\frac{|m+\mu|}{2R} \cdot \frac{|m+\mu|}{R^{\frac{1}{4}+7\omega}}} \right) \\ & < c_{11} \cdot \left( \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{|m|}} + \log \left( 2 + \frac{(b-a) \cdot |m|}{R} \right) + (b-a) \sqrt{\frac{m^2}{R^{\frac{1}{4}+7\omega}}} \right) \end{aligned} \right.$$

wegen

$$\frac{1}{2}|m| \leq |m+\mu| \leq \frac{3}{2}|m|.$$

In (71) bezeichnet  $n_\nu$  die zu jedem  $\nu$  im Intervall  $\alpha_m \leq \nu \leq \beta_m$  durch die Beziehungen

$$(72) \quad \lambda + (m+\mu)f'(n_\nu) = \nu \quad \text{und} \quad a \leq n_\nu \leq b$$

eindeutig bestimmte Zahl, und das  $+$ - oder  $-$ -Zeichen wird benutzt, je nachdem  $(m+\mu) \cdot f''(u)$  im Intervall  $a \leq u \leq b$  stets positiv oder stets negativ ist.

Es ist

$$(73) \quad \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|m|} \cdot \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{|m|}} = c_{12} \sqrt{R};$$

wegen (67) ist  $\omega < \frac{1}{6}$ , also  $t \leq \sqrt{R}$ , und hieraus folgt

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{t}{m^2} \cdot \log \left( 2 + \frac{(b-a) \cdot |m|}{R} \right) < c_{13} t \log \left( 2 + \frac{b-a}{R} \right) \\ & \leq c_{13} \sqrt{R} \cdot \left( 2 + \frac{b-a}{R} \right) \\ & \leq c_{13} \left( 2\sqrt{R} + \frac{b-a}{R^{\frac{1}{4}+\omega}} \right); \end{aligned} \right.$$

außerdem ist

$$(75) \quad \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \text{Min} \left( \frac{1}{|m|}, \frac{t}{m^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{m^2}{R^{\frac{1}{4}+7\omega}}} < c_{11} \sqrt{\frac{t^2}{R^{\frac{1}{4}+7\omega}}} = \frac{c_{14}}{R^{\frac{1}{4}+\omega}}.$$

Es genügt jetzt zu beweisen

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \text{Min} \left( \frac{1}{|m|^{\frac{1}{11}}}, \frac{t}{|m|^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \sum_{\alpha_m \leq \nu \leq \beta_m} \frac{1}{V|f''(n_\nu)|} e^{2\pi i((\lambda-\nu)n_\nu + (m+\mu)f(n_\nu))} \right| \\ & < c_{15} \left( \frac{b-a}{R^{\frac{1}{4}+\omega}} + \sqrt{R} \right); \end{aligned} \right.$$

denn aus (71), (73), (74), (75) und (76) folgt, daß der Ausdruck (70), also auch die linke Seite von (14), kleiner ist als

$$c_{41} c_{42} \sqrt{R} + 2c_{41} c_{43} \sqrt{R} + c_{41} c_{43} \cdot \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2}+\omega}} + c_{41} c_{44} \cdot \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2}+\omega}} \\ + c_{45} \sqrt{2} \cdot \left( \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2}+\omega}} + \sqrt{R} \right).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir

$$(77) \quad b-a > 2R^{\frac{1}{2}-\omega}$$

voraus; denn wegen (11) ist

$$(78) \quad \begin{cases} \beta_m - \alpha_m = |m + \mu| \cdot |f'(b) - f'(a)| \\ = |m + \mu| \cdot \int_a^b |f''(u)| du \leq 2|m| \cdot \frac{b-a}{R}, \end{cases}$$

so daß die linke Seite von (76)

$$\leq \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \text{Min} \left( \frac{1}{|m|^{\frac{1}{2}}}, \frac{t}{|m|^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left( \frac{2|m| \cdot (b-a)}{R} + 1 \right) \cdot \sqrt{2R} \leq c_{46} \left( \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2}-\omega}} + \sqrt{R} \right),$$

also, falls  $b-a \leq 2R^{\frac{1}{2}-\omega}$ , kleiner als  $4c_{46} \sqrt{R}$  ist.

Wegen (78) ist der Beitrag in die linke Seite von (76) eines Gliedes mit  $|m| < R^{\frac{1}{2}-2\omega}$  höchstens

$$\frac{1}{|m|^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\beta_m - \alpha_m + 1}{\sqrt{\frac{1}{2R}}} \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{R} \cdot \sqrt{|m|}} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{R}}{|m|^{\frac{1}{2}}},$$

so daß der Gesamtbeitrag in die linke Seite von (76) aller Glieder mit  $|m| < R^{\frac{1}{2}-2\omega}$  höchstens

$$4\sqrt{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{R}} \sum_{m=1}^{[R^{\frac{1}{2}-2\omega}]} \frac{1}{\sqrt{m}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{R} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|m|^{\frac{1}{2}}} < c_{47} \left( \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2}+\omega}} + \sqrt{R} \right)$$

ist.

Wegen (78) ist der Beitrag in die linke Seite von (76) eines Gliedes mit  $|m| \geq R^{\frac{1}{2}+\omega}$  höchstens

$$\text{Min} \left( \frac{1}{|m|^{\frac{1}{2}}}, \frac{t}{|m|^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{\beta_m - \alpha_m + 1}{\sqrt{\frac{1}{2R}}} \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{(b-a)t}{\sqrt{R}} \cdot \frac{1}{|m|^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{R}}{|m|^{\frac{1}{2}}},$$



so daß der Gesamtbeitrag in die linke Seite von (76) aller Glieder mit  $|m| \geq R^{\frac{1}{2}+4\omega}$  höchstens

$$2\sqrt{2} \cdot \frac{(b-a)t}{\sqrt{R}} \sum_{|m| \geq R^{\frac{1}{2}+4\omega}} \frac{1}{|m|^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{R} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|m|^{\frac{1}{2}}} \\ < c_{48} \left( \frac{(b-a)t}{R^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{R^{\frac{1}{2}+2\omega}} + \sqrt{R} \right) = c_{48} \left( \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2}+\omega}} + \sqrt{R} \right)$$

ist.

Es genügt jetzt zu beweisen

$$(79) \quad \left\{ R^{\frac{1}{2}-2\omega} \sum_{|m| < R^{\frac{1}{2}+4\omega}} \min \left( \frac{1}{|m|^{\frac{1}{2}}}, \frac{t}{|m|^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \sum_{\alpha_m \leq \nu \leq \beta_m} \frac{1}{V|f''(n_\nu)|} e^{2\pi i((\lambda-\nu)n_\nu + (m+\mu)f(n_\nu))} \right\} \\ < c_{49} \cdot \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2}+\omega}};$$

denn mit Rücksicht auf das Obenstehende folgt (76) mit  $c_{45} = c_{47} + c_{48} + c_{49}$  aus (79).

Es ist hinreichend zu zeigen, daß aus

$$R^{\frac{1}{2}-2\omega} \leq M < R^{\frac{1}{2}+4\omega}$$

und

$$\alpha_m \leq \gamma_m < \delta_m \leq \beta_m$$

folgt

$$(80) \quad \sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\gamma_m \leq \nu \leq \delta_m} e^{2\pi i((\lambda-\nu)n_\nu + (m+\mu)f(n_\nu))} \right| < c_{50} \cdot \frac{(\beta-\alpha)M^2}{R^{\frac{1}{2}+\omega}}.$$

Es sei nämlich (80) bewiesen, und (79) zu beweisen. Wegen (72) ist

$$\frac{dn_\nu}{d\nu} = \frac{1}{(m+\mu) \cdot f''(n_\nu)},$$

also stets positiv oder stets negativ, so daß  $n_\nu$  eine monotone Funktion von  $\nu$  ist; wegen der Monotonie von  $f''(u)$  ist dann  $f''(n_\nu)$  eine monotone Funktion von  $\nu$ , und zwar eine Funktion, die nach (11) absolut  $\geq \frac{1}{2R}$  ist, so daß mittels partieller Integration aus (80) folgt

$$(81) \quad \left\{ \sum_{M \leq m < 2M} \left| \sum_{\alpha_m \leq \nu \leq \beta_m} \frac{1}{V|f''(n_\nu)|} e^{2\pi i((\lambda-\nu)n_\nu + (m+\mu)f(n_\nu))} \right| \right. \\ < c_{51} \cdot (\beta-\alpha) M^2 \cdot R^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\omega} = c_{51} M^2 R^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\omega} \int_a^b |f''(u)| du \\ \left. \leq c_{51} \cdot \frac{M^2(b-a)}{R^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\omega}} \right\}$$

Da alle Voraussetzungen gelten bleiben, wenn  $f(u)$  durch  $-f(u)$  und  $\mu$  durch  $-\mu$  ersetzt wird, darf in (81)  $f(u)$  durch  $-f(u)$ ,  $\mu$  durch  $-\mu$  ersetzt werden; wenn man dann  $m$  durch  $-m$  ersetzt, ergibt sich, daß (81) auch gültig ist, wenn  $m$  nicht die ganzen Zahlen des Intervalls  $(M, 2M)$ , sondern des Intervalls  $(-2M, -M)$  durchläuft. Hieraus ergibt sich

$$\sum_{M \leq |m| < 2M} \left| \sum_{\alpha_m \leq \nu \leq \beta_m} \frac{1}{V|f''(n_r)|} \cdot e^{2\pi i((\lambda-r)n_r + (m+\mu)f(m_r))} \right| < 2c_{31} \cdot \frac{M^2(b-a)}{R^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\omega}}.$$

Hieraus folgt, wenn  $N = R^{\frac{1}{2} - 2\omega}$  gesetzt wird, daß die linke Seite von (79) höchstens beträgt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{h \geq 0 \\ N \cdot 2^h < R^{\frac{1}{2} + 4\omega}}} \sum_{N \cdot 2^h \leq m < N \cdot 2^{h+1}} &< \sum_{h=0}^{\infty} \text{Min} \left( \frac{1}{N^{\frac{3}{2} \cdot 2^h}}, \frac{t}{N^{\frac{3}{2} \cdot 2^h}} \right) \cdot 2c_{31} \cdot \frac{(b-a) \cdot (2^h N)^2}{R^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\omega}} \\ &\leq 2c_{31} \cdot \frac{(b-a)}{R^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\omega}} \left( N^{\frac{1}{2}} \sum_{1 \leq 2^h \leq \frac{t}{N}} 2^{\frac{1}{2}h} + \frac{t}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{2^h > \frac{t}{N}} 2^{-\frac{1}{2}h} \right) \\ &< c_{32} \cdot \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\omega}} \left( N^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{t}{N} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \left( \frac{N}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= 2c_{32} \cdot \frac{(b-a) \cdot t^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\omega}} = 2c_{32} \cdot \frac{b-a}{R^{\frac{1}{2} + \omega}}. \end{aligned}$$

Hiermit ist gezeigt, daß (79) aus (80) folgt, so daß es genügt, (80) zu beweisen.

Da  $f''(s)$  im Intervall  $a \leq s \leq b$  stets positiv oder stets negativ ist, gibt es zu jedem  $\sigma$  im Intervall  $a \leq \sigma \leq \beta$  eine und nur eine Zahl  $s_\sigma$  mit den Eigenschaften

$$(82) \quad f'(s_\sigma) = \sigma \quad \text{und} \quad a \leq s_\sigma \leq b.$$

Falls

$$(83) \quad \varphi(\sigma) = f(s_\sigma) - \sigma s_\sigma \quad \text{und} \quad r = \lambda + (m + \mu)\sigma$$

gesetzt wird, folgt aus (72), (82) und (83)

$$f'(s_\sigma) = f'(n_r) \quad \text{also} \quad s_\sigma = n_r,$$

somit

$$\begin{aligned} (\lambda - r)n_r + (m + \mu)f(n_r) &= (m + \mu)(-\sigma s_\sigma + f(s_\sigma)) \\ &= (m + \mu)\varphi(\sigma) = (m + \mu)\varphi\left(\frac{r - \lambda}{m + \mu}\right). \end{aligned}$$

Wegen (83) und (82) ist

$$(84) \quad \begin{cases} \varphi'(\sigma) = -s_\sigma, \\ \varphi''(\sigma) = -\frac{ds_\sigma}{d\sigma} = -\frac{1}{f''(s_\sigma)}, \\ \varphi'''(\sigma) = \frac{f'''(s_\sigma)}{(f''(s_\sigma))^2} \cdot \frac{ds_\sigma}{d\sigma} = \frac{f'''(s_\sigma)}{(f''(s_\sigma))^3}, \end{cases}$$

allgemein für  $2 \leq q \leq k$  (wie man leicht mittels einer vollständigen Induktion beweist) bei geeignet gewählten Koeffizienten  $w_{h_1, h_2, \dots, h_{q-1}}$  (welche nur von den Parametern  $h_1, h_2, \dots, h_{q-1}$  abhängen)

$$(85) \quad \varphi^{(q+1)}(\sigma) = \frac{1}{(f''(\sigma))^{2q-1}} \sum w_{h_1, h_2, \dots, h_{q-1}} f^{(h_1+2)}(\sigma) \cdot f^{(h_2+2)}(\sigma) \cdot \dots \cdot f^{(h_{q-1}+2)}(\sigma),$$

falls die letzte Summe erstreckt wird über alle nicht-negativen ganzen Zahlen  $h_1, h_2, \dots, h_{q-1}$  mit einer Summe  $= q-1$ .

Wegen (84) und (11) ist

$$(86) \quad R \leq |\varphi''(\sigma)| \leq 2R \quad (\alpha \leq \sigma \leq \beta);$$

wegen (85), (3) und (11) ist

$|\varphi^{(k+1)}(\sigma)| \leq c_{33} \cdot |f''(\sigma)|^{-\frac{1}{2}k+\eta} \leq c_{33} \cdot 2^{\frac{1}{2}k-\eta} R^{\frac{1}{2}k-\eta}$  oder  $\leq c_{33} R^{\frac{1}{2}k-\eta}$ ,  
je nachdem der Exponent  $\frac{1}{2}k - \eta$  positiv ist oder nicht; es ist also stets

$$(87) \quad |\varphi^{(k+1)}(\sigma)| < 2^{\frac{1}{2}k} c_{33} R^{\frac{1}{2}k-\eta}.$$

Wir werden jetzt mittels (67) beweisen, daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 mit  $x_7 = R^{\frac{1}{2}\omega p_k}$  und  $c_{34} = \text{Max}(3, 2^{\frac{1}{2}k} c_{33})$  erfüllt sind. Es ist

$$\omega < \frac{1}{6(6p_k+1)}, \text{ also } \frac{1}{3} - 2\omega > 12p_k\omega, \text{ also } M > x_7^2;$$

es ist

$$\omega < \frac{1}{18\left(\frac{22}{13}p_k+1\right)}, \text{ also } \frac{1}{6} - 3\omega > \frac{66}{13}p_k\omega,$$

und wegen (11) und (77) folgt hieraus

$$M(\beta - \alpha) = M \int_{\alpha}^{\beta} |f''(u)| du \geq M \cdot \frac{\beta - \alpha}{2R} > \frac{M}{R^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\omega}} \geq R^{\frac{1}{2}-2\omega} \geq x_7^{\frac{44}{13}};$$

wegen  $\omega < \frac{1}{6}$  ist

$$M \leq R^{\frac{1}{2}+4\omega} \leq R \leq |\varphi''(\sigma)| \quad (\alpha \leq \sigma \leq \beta);$$

es ist

$$\omega \leq \frac{1}{3(15p_k+8)}, \text{ also } \frac{1}{3} - 8\omega - 15p_k\omega \geq 0$$

und hieraus folgt wegen (86)

$$|\varphi''(\sigma)| \leq 2R \leq 2R^{\frac{1}{2}-8\omega-15p_k\omega} < 3 \frac{M^4}{x_7^{10}};$$

schließlich ist

$$\omega \leq \frac{2\eta}{3p_k+4k}, \text{ also } 2\omega k \leq \eta - \frac{3}{2}p_k\omega,$$

und hieraus folgt wegen (87)

$$M^k \geq R^{k(\frac{1}{2}-2\omega)} \geq R^{\frac{1}{2}k-\eta+\frac{3}{2}p_k\omega} \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{2}k} c_{33}} \cdot x_7 \cdot |\varphi^{(k+1)}(\sigma)| \quad (\alpha \leq \sigma \leq \beta).$$

Da also die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 mit  $x_i = R^{\frac{1}{2}p_i \omega}$  erfüllt sind, folgt (80) aus (56), womit der Satz 10 bewiesen ist.

### Anwendungen.

Um eine sehr allgemeine Anwendung von Satz 9 ableiten zu können, führen wir zwei neue Definitionen ein.

**Definition.** Es bezeichne  $G$  einen Bereich, der von einer geschlossenen Jordankurve begrenzt wird und einen bestimmten Inhalt  $J(G)$  hat; es werde vorausgesetzt, daß diese Jordankurve höchstens nur eine endliche Anzahl von Strecken enthält, und daß die Gleichung jeder in dieser Kurve vorkommenden Strecke gebracht werden kann in die Gestalt  $u = \gamma$ , oder  $v = \gamma$ , wo  $\gamma - \frac{1}{2}$  ganz ist.

Es bezeichnen  $\lambda$  und  $\mu$  reelle Zahlen  $\geq -\frac{1}{2}$  und  $\leq \frac{1}{2}$ , und  $\bar{A}(G)$  bezeichne die Summe  $\sum e^{2\pi i(\lambda u + \mu v)}$ , erstreckt über die Koordinatenpaare  $(u, v)$  der Gitterpunkte von  $G$ , wobei die Gitterpunkte auf dem Rande von  $G$  nur halb in Anschlag gebracht werden.

Es werde jetzt die Funktion  $\bar{T}(G)$  folgendermaßen definiert:

1. Falls  $\lambda = \mu = 0$  ist, ist

$$\bar{T}(G) = \bar{A}(G) - J(G).$$

2. Falls  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu = 0$  ist, ist

$$\bar{T}(G) = \bar{A}(G) + \frac{1}{2i \sin \pi \lambda} \sum \pm e^{2\pi i \lambda \gamma l};$$

die letzte Summe wird erstreckt über alle Strecken des Randes von  $G$  mit der Gleichung  $v = \gamma$  (wo also  $\gamma - \frac{1}{2}$  ganz ist), und  $l$  bezeichnet die (positive) Länge der Strecke; das  $+$ - oder  $-$ -Zeichen wird benutzt, je nachdem in der Umgebung eines Innenpunktes der Strecke die Punkte im Innern von  $G$  rechts oder links von der Strecke liegen; die Summe ist also Null, wenn der Rand von  $G$  keine Strecken  $v = \gamma$  enthält.

3. Falls  $\lambda = 0$ ,  $\mu \neq 0$  ist, ist

$$\bar{T}(G) = \bar{A}(G) + \frac{1}{2i \sin \pi \mu} \sum \pm e^{2\pi i \mu \gamma l};$$

die letzte Summe wird erstreckt über alle Strecken im Rande von  $G$  mit der Gleichung  $u = \gamma$  (wo also  $\gamma - \frac{1}{2}$  ganz ist), und  $l$  bezeichnet die (positive) Länge der Strecke; das  $+$ - oder  $-$ -Zeichen wird benutzt, je nachdem in der Umgebung eines Innenpunktes der Strecke die Punkte im Innern von  $G$  oberhalb oder unterhalb der Strecke liegen; die Summe ist Null, wenn der Rand von  $G$  keine Strecken  $u = \gamma$  enthält.

4. Falls  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$  ist, ist

$$\bar{T}(G) = \bar{A}(G).$$

Die erste in der Einleitung erwähnte Anwendung ist dann ein Spezialfall des folgenden sehr allgemeinen Satzes.

**Satz 11. Voraussetzungen:** 1. Es sei  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Bereichen  $G$ , und es sei  $\mathfrak{M}$  ein-eindeutig abbildbar auf die Menge der positiven Zahlen  $x$ .

2. Es werde  $G$  begrenzt von einer geschlossenen Jordankurve, die aus einer beschränkten Anzahl von Strecken und Kurven zusammengesetzt ist.

3. Jede im Rande von  $G$  vorkommende Strecke hat die Gleichung  $u = \gamma$  oder  $v = \gamma$ , wo  $\gamma - \frac{1}{2}$  ganz ist und von  $x$  abhängen darf.

4. Die Gleichung jeder im Rande von  $G$  vorkommenden Kurve kann gebracht werden in die Gestalt

$$v = f(u) \quad (a \leq u \leq b), \quad \text{oder} \quad u = f(v) \quad (a \leq v \leq b);$$

hierin sind  $a$  und  $b$  ( $a < b$ ) abhängig von  $x$  mit der Eigenschaft  $b - a = O(x)$ ;  $f(w)$  ist eine im Intervall  $a \leq w \leq b$  definierte reelle, auch von  $x$  abhängige Funktion von  $w$ , die fünfmal nach  $w$  differenzierbar<sup>2)</sup> ist, eine monotone zweite Derivierte  $f''(w)$  besitzt, und die Beziehungen

$$(88) \quad f'(w) = O(1); \quad \frac{1}{f''(w)} = O(x); \quad f^{(V)}(w) = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

gleichmäßig in  $w$  ( $a \leq w \leq b$ ) erfüllt.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine absolute Konstante  $\tau < \frac{1}{2}$  mit der Eigenschaft

$$\bar{T}(G) = O(x^\tau).$$

Daß dieser Satz die erste Anwendung als Spezialfall enthält, ist klar. Denn es sei  $A_1(x)$  bzw.  $A_2(x)$  gleich der Summe  $\sum e^{2\pi i(\lambda u + \mu v)}$ , erstreckt über die Koordinatenpaare  $u$  und  $v$  im Innern und auf dem Rande der Ellipse (5), wobei die Gitterpunkte auf dem Rande ganz bzw. halb in Anschlag gebracht werden; hierbei wird  $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$  vorausgesetzt. Nach Satz 11 (mit  $\sqrt{x}$  statt  $x$ ) gibt es eine absolute Konstante  $\Theta = \frac{1}{2}\tau < \frac{1}{4}$  mit der Eigenschaft

$$A_2(x) = \frac{\pi x}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} + O(x^\Theta) \quad \text{falls } \lambda = \mu = 0, \\ = O(x^\Theta) \quad \text{in den anderen Fällen.}$$

Da

$$A_1(x) = \lim_{h \rightarrow 0} A_2(x+h)$$

ist, folgt hieraus

$$A_1(x) = \frac{\pi x}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} + O(x^\Theta) \quad \text{falls } \lambda = \mu = 0, \\ = O(x^\Theta) \quad \text{in den anderen Fällen.}$$

Die zweite in der Einleitung genannte Anwendung ist ein Spezialfall von Satz 12.

Satz 12. *Es seien die Voraussetzungen 1, 2 und 4 des vorigen Satzes erfüllt, und es werde die dritte Voraussetzung ersetzt durch die folgende allgemeinere Bedingung:*

3\*. *Jede im Rande von  $G$  vorkommende Strecke hat die Gleichung  $u = \gamma$ , oder  $v = \gamma$ , oder  $v = mu$ ; hierin ist  $\gamma - \frac{1}{2}$  ganz und von  $x$  abhängig,  $m$  rational und von  $x$  unabhängig.*

Dann gibt es eine absolute Konstante  $\tau < \frac{2}{3}$  derart, daß die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande von  $G$ , wobei die Gitterpunkte auf dem Rande von  $G$  halb in Anschlag gebracht werden, gleich

$$J(G) + O(x^\tau)$$

ist.

Dieser Satz enthält die zweite Anwendung als Spezialfall: Denn es bezeichne  $A_3(x)$  bzw.  $A_4(x)$  die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des in dieser Anwendung behandelten Sektors, wobei die Gitterpunkte auf den zwei Strecken nur halb, die nicht auf diesen Strecken liegenden Gitterpunkte auf dem Bogen des Kegelschnittes ganz bzw. halb gerechnet werden. Dann ist nach Satz 12 (mit  $\sqrt{x}$  statt  $x$ )

$$A_4(x) = c_3 x + O(x^\theta),$$

also

$$A_3(x) = \lim_{h \rightarrow 0} A_4(x+h) = c_3 x + O(x^\theta).$$

Jetzt werden wir die Sätze 11 und 12 beweisen.

Beweis. Alle in diesem Beweise gezogenen Hilfsgeraden laufen parallel zu einer der Koordinatenachsen, und zwar in einer Entfernung  $\gamma$ , wo  $\gamma - \frac{1}{2}$  ganz ist. Mittels solcher Geraden kann man  $G$  zeichnen als die Differenz von zwei Bereichen  $G_1$  und  $G_2$  derart, daß jede dieser zwei Bereiche mittels Geraden mit der genannten Eigenschaft in eine beschränkte Anzahl von Teilbereichen  $G_3$  zu verteilen ist, deren jeder wenigstens eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1.  $G_3$  ist ein Rechteck  $\gamma_1 \leq u \leq \gamma_2$ ,  $\gamma_3 \leq v \leq \gamma_4$ , wobei  $\gamma_1 - \frac{1}{2}$ ,  $\gamma_2 - \frac{1}{2}$ ,  $\gamma_3 - \frac{1}{2}$  und  $\gamma_4 - \frac{1}{2}$  ganz sind.

2.  $G_3$  liegt ganz im Innern und auf dem Rande eines Quadrates, dessen Mittelpunkt mit einem Gitterpunkt zusammenfällt, und dessen Seiten die Länge 1 haben und parallel zu den Koordinatenachsen laufen.

3. Eventuell nach Umkehrung oder (und) Vertauschung der Koordinatenachsen ist  $G_3$  das Trapez  $\gamma_1 \leq u \leq \gamma_2$ ,  $\gamma_3 \leq v \leq mu$ , wobei  $\gamma_1 - \frac{1}{2}$ ,  $\gamma_2 - \frac{1}{2}$ ,  $\gamma_3 - \frac{1}{2}$  ganz sind und von  $x$  abhängen dürfen,  $m$  rational

und von  $x$  unabhängig ist. Dieser Fall tritt nicht im Beweis von Satz 11 auf, aber kann im Beweis von Satz 12 vorkommen.

4. Eventuell nach Umkehrung oder (und) Vertauschung der Koordinatenachsen ist  $G_3$  der Bereich  $a \leq u \leq b$ ,  $\gamma \leq v \leq f(u)$ ; hierbei dürfen  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  und  $f(u)$  von  $x$  abhängen;  $a$  ist  $< b$ , aber  $b - a = O(x)$ ;  $a - \frac{1}{2}$ ,  $b - \frac{1}{2}$ ,  $\gamma - \frac{1}{2}$  sind ganz; im Intervall  $a \leq w \leq b$  ist  $f(w) > \gamma$  und erfüllt die Funktion  $f(w)$  die Beziehungen (88).

Aus der Definition der  $\bar{T}$ -Funktion ergibt sich unmittelbar, daß im ersten und auch im zweiten Falle  $\bar{T}(G_3)$  beschränkt ist. Da im dritten Falle  $m$  rational und unabhängig von  $x$  ist, ist dann die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande von  $G_3$ , wobei die Gitterpunkte auf dem Rande halb in Anschlag gebracht werden, gleich  $J(G_3) + O(1)$ .

Betrachten wir jetzt den vierten Fall. Es werde  $b - a = y$  gesetzt, so daß  $y$  eine positive Funktion von  $x$  bezeichnet. Alle in diesem Beweise vorkommenden Beziehungen mit dem Landauschen Zeichen  $O$  beziehen sich auf  $x$ , und sind gleichmäßig in  $w$  im Intervall  $a \leq w \leq b$ . Wegen  $y = O(x)$  und (88) ist

$$(89) \quad f'(w) = O(1) \quad \text{und} \quad f''(w) = O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Für  $a \leq \frac{w}{w+3h} \leq b$  und  $q = 1, 2$  oder  $3$  ist wegen (89)

$$\begin{aligned} q \cdot h f''(w) + q^2 \cdot \frac{h^2}{2} f'''(w) + q^3 \cdot \frac{h^3}{6} f^{IV}(w) \\ = -q^4 \cdot \frac{h^4}{24} f^{(V)}(\xi) + f'(w + qh) - f'(w) = O(1); \end{aligned}$$

hierin ist  $\xi$  eine geeignet gewählte Zahl im Intervall  $(w, w + 3h)$  bzw.  $(w + 3h, w)$ . Es ist also

$$h f''(w) + \frac{h^2}{2} f'''(w) + \frac{h^3}{6} f^{IV}(w) = O(1);$$

$$2 \cdot h f''(w) + 4 \cdot \frac{h^2}{2} f'''(w) + 8 \cdot \frac{h^3}{6} f^{IV}(w) = O(1)$$

und

$$3 \cdot h f''(w) + 9 \cdot \frac{h^2}{2} f'''(w) + 27 \cdot \frac{h^3}{6} f^{IV}(w) = O(1).$$

Wir multiplizieren beide Seiten von diesen Beziehungen bzw. mit  $3$ ,  $-3$  und  $1$ . Nach Addition findet man

$$h^3 f^{IV}(w) = O(1),$$

und da  $h = \pm \frac{y}{6}$  gewählt werden kann, folgt aus (89)

$$(90) \quad f'(w) = O(1) \quad \text{und} \quad f^{IV}(w) = O\left(\frac{1}{y^3}\right).$$

Auf entsprechende Art leitet man aus diesen zwei Beziehungen ab

$$(91) \quad f'''(w) = O\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad \text{und} \quad f''(w) = O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Wir werden jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem  $y \leq x^{\frac{25}{36}}$  oder  $y > x^{\frac{25}{36}}$  ist.

I. Es sei  $y \leq x^{\frac{25}{36}}$ . Nach Satz 8 ist wegen (91) und (88)

$$(92) \quad \begin{cases} T(G) = O \int_a^b \left( \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{y} \right) du + O(\sqrt{x}) \\ \quad = O(y^{\frac{1}{2}}) + O(1) + O(\sqrt{x}) = O(x^{\frac{25}{54}}). \end{cases}$$

II. Es sei  $y > x^{\frac{25}{36}}$ . Dann sind bei hinreichend großem  $x$  die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt mit  $k=4$ ,  $\eta = \frac{1}{12}$  und  $\eta = \frac{1}{2}$ . Denn wegen (91) und (88) ist

$$(93) \quad \frac{|f'''(w)|}{|f''(w)|^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{y^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right),$$

und jedes System von drei nicht-negativen ganzen Zahlen  $h_1, h_2, h_3$  mit einer Summe  $= 3$  hat wegen (91), (90), (89) und (88) die Eigenschaft

$$(94) \quad \frac{|f^{(h_1+2)}(w) \cdot f^{(h_2+2)}(w) \cdot f^{(h_3+2)}(w)|}{|f''(w)|^{\frac{4}{3} \cdot 4 - 1 + \frac{1}{2}}} = O\left(\frac{x^{\frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2}}}{y^2}\right) \\ = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right),$$

so daß bei hinreichend großem  $x$  die linken Seiten von (93) und (94)  $< 1$  sind. Die Voraussetzungen von Satz 9 sind dann erfüllt, so daß es eine positive absolute Konstante  $\omega$  gibt mit der Eigenschaft

$$(95) \quad \begin{cases} T(G_3) = O \int_a^b \left( \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\omega}} + \frac{1}{y} \right) du + O(\sqrt{x}) \\ \quad = O(y^{\frac{1}{2}-\omega}) + O(1) + O(\sqrt{x}) = O(x^{\frac{1}{2}-\omega}) + O(\sqrt{x}). \end{cases}$$

Aus (92) und (95) folgt, daß es eine positive absolute Konstante  $\tau < \frac{2}{3}$  gibt mit der Eigenschaft

$$(96) \quad T(G_3) = O(x^\tau).$$

Da im Intervall  $a \leq u \leq b$  stets  $y < f(u)$  ist, gibt es eine positive Zahl  $p_0 < 1$  mit der Eigenschaft  $y < f(u) - p_0$ . Falls  $G_3(p)$  ( $0 < p \leq p_0$ )



den Bereich  $a \leq u \leq b$ ,  $\gamma \leq v \leq f(u) - p$  bezeichnet, findet man, wenn man  $f(u)$  durch  $f(u) - p$  ersetzt, statt der Beziehung (96)

$$(97) \quad T(G_3(p)) = O(x')$$

gleichmäßig in  $p$ .

Es bezeichne  $B$  die Summe  $\sum e^{2\pi i f(u+v)}$ , erstreckt über die Koordinatenpaare  $(u, v)$  der Gitterpunkte auf der Kurve  $a \leq u \leq b$ ,  $v = f(u)$ .

Wegen  $B = T(G_3) - \lim_{p=0} T(G_3(p))$  folgt aus (96) und (97)

$$(98) \quad B = O(x').$$

Nach den Definitionen der  $T$ - und  $\bar{T}$ -Funktionen ist

$$T(G_3) = \bar{T}(G_3) + \frac{1}{2} B - \frac{\cotg \pi \lambda}{4 \sin \pi \lambda} (e^{2\pi i \lambda b} f'(b) - e^{2\pi i \lambda a} f'(a))$$

falls  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu = 0$ ,

$$T(G_3) = \bar{T}(G_3) + \frac{1}{2} B$$

in den anderen Fällen, so daß aus (96), (98) und  $f'(w) = O(1)$  folgt

$$\bar{T}(G_3) = O(x').$$

Wir werden jetzt die Sätze 11 und 12 in wenigen Zeilen beweisen; in diesen Zeilen muß man für den Beweis von Satz 12 die  $\bar{T}$ -Funktion eines Bereiches ersetzen durch die  $\bar{A}$ -Funktion, vermindert um den Inhalt des Bereiches, und hierbei ist die  $\bar{A}$ -Funktion die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Bereiches, wobei die Gitterpunkte auf dem Rande halb in Anschlag gebracht werden.

Nach dem Obigem hat jeder der Teilbereiche  $G_2$  von  $G_1$  und  $G_3$  eine  $\bar{T}$ -Funktion  $= O(x')$ , und wie sich unmittelbar aus der Definition der  $\bar{T}$ -Funktion ergibt, ist  $\bar{T}(G_1)$  bzw.  $\bar{T}(G_3)$  gleich der Summe der  $\bar{T}$ -Funktionen der Teilbereiche von  $G_1$  bzw.  $G_3$ , also

$$\bar{T}(G_1) = O(x') \quad \text{und} \quad \bar{T}(G_3) = O(x').$$

Nach der Definition der  $\bar{T}$ -Funktion ist

$$\bar{T}(G) = \bar{T}(G_1) - \bar{T}(G_3) = O(x').$$

Hiermit sind die Sätze 11 und 12 vollständig bewiesen.

### Teilerproblem.

Schließlich werden wir noch das Teilerproblem betrachten. Um Abschätzung (7) aus Satz 2 abzuleiten, braucht man noch zwei neue Sätze.

Satz 13. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt.*

Behauptungen. 1. Falls Voraussetzung B gilt, gibt es eine höchstens nur von  $q$  und  $c_{12}$  abhängige Zahl  $c_{34}$  mit der Eigenschaft

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} \psi(f(n)) \right| < c_{34} \cdot \frac{b-a}{q^{1/2} \sqrt{x_2}}.$$

2. Falls die bei der Definition von  $T(G)$  genannten Bedingungen erfüllt sind, gibt es eine höchstens nur von  $q$ ,  $c_{12}$ ,  $\lambda$  und  $\mu$  abhängige Zahl  $c_{35}$  mit der Eigenschaft

$$|T(G)| < c_{35} \cdot \frac{b-a}{q^{1/2} \sqrt{x_2}}.$$

Genau wie Satz 1 aus Satz 4, und Satz 8 aus Satz 7 folgt<sup>14) 17)</sup>, so folgt der obige Satz aus

Satz 14. Es sei  $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ ,  $m$  ganz  $\neq 0$ ; es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 und es sei Voraussetzung B erfüllt; es werde  $t = \frac{q+1}{\sqrt{x_2}}$  gesetzt.

Dann gibt es eine höchstens nur von  $q$  und  $c_{12}$  abhängige Zahl  $c_{36}$  mit der Eigenschaft

$$(99) \quad t \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i (\lambda n + \mu f(n))} \int_0^{\frac{1}{t}} \psi(f(n) + y) dy \right| < c_{36} \cdot \frac{b-a}{t}.$$

Beweis. Genau wie beim Beweis von Satz 10 beweist man, daß die linke Seite von (99) nicht größer ist als der Ausdruck (70). Die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 sind mit  $\lambda u + (m + \mu)f(u)$  statt  $f(u)$ , mit  $\frac{x_2}{|m|}$  statt  $x_2$ , mit  $2c_{12}$  statt  $c_{12}$  erfüllt, so daß es eine höchstens nur von  $q$  und  $c_{12}$  abhängige Zahl  $c_{37}$  gibt mit der Eigenschaft

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i (\lambda n + (m + \mu)f(n))} \right| < c_{37} \cdot \frac{(b-a) \sqrt[Q]{|m|}}{\sqrt{x_2}},$$

und dann ist der Ausdruck (70) kleiner als

$$c_{37} \cdot \frac{(b-a)}{\sqrt[Q]{x_2}} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \text{Min} \left( \frac{1}{|m|^{1-\frac{1}{Q}}}, \frac{t}{|m|^{\frac{2-1}{Q}}} \right) < c_{38} \cdot \frac{(b-a)}{\sqrt[Q]{x_2}} \cdot t^{\frac{1}{Q}} = c_{38} \cdot \frac{b-a}{t}.$$

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Teilerproblem: Es bezeichne  $\psi(v)$  irgendeine Funktion, die Voraussetzung B erfüllt; es bezeichne  $x$  eine Zahl  $> 1$ ,  $a$  eine Zahl im Intervall

$$(100) \quad x^{\frac{1}{r}} \leq a \leq x^{\frac{1}{r}},$$

und es werde gesetzt

$$x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Min} \left( \frac{a^4}{x}, \frac{x}{a^4} \right); \quad c_{12} = 2^6, \quad q = 1, \quad b = 2a, \quad f(u) = \frac{x}{u} \quad (a \leq u \leq b).$$

Dann sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt. Denn es ist  $b - a = a \geq 2x_2 > x_2$ ; im Intervall  $a \leq u \leq b$  ist

$$\frac{1}{2^6} \cdot \frac{x_2}{(b-a)^3} < \frac{6x}{2^4 a^4} \leq |f'''(u)| = \frac{6x}{u^4} < \frac{2^7 x}{a^4} \leq \frac{2^6}{x_2}$$

und

$$|f'''(u_1)| \leq 2^4 |f'''(u_2)| < 2^6 |f'''(u_2)| \quad (a \leq u_1 \leq b).$$

Nach Satz 13 ist dann

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \sum_{a \leq n < b} \psi(f(n)) \right| &< c_{30} \cdot (b-a) \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{x}{b^4}} + \sqrt[3]{\frac{b^4}{x}} \right) + 1 \\ &< (c_{30} + 1) \cdot (x^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}); \end{aligned} \right.$$

hierin bezeichnet  $c_{30}$  (desgl.  $c_{30}$  und  $c_{31}$  nachher) eine geeignet gewählte absolute Konstante.

Es bezeichne  $H$  die größte ganze Zahl  $h$  für die  $\frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^{h+1}} \geq x^{\frac{1}{4}}$  ist.

Dann ist  $\frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^{H+1}} < 2x^{\frac{1}{4}}$ , also

$$(102) \quad \left| \sum_{n < \frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^{H+1}}} \psi(f(n)) \right| < 2x^{\frac{1}{4}}.$$

Aus (101) mit  $a = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^{h+1}}$  ( $0 \leq h \leq H$ ) folgt

$$(103) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \sum_{\frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^{h+1}} \leq n < \frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^h}} \psi(f(n)) \right| &\leq \sum_{h=0}^H \left| \sum_{\frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^{h+1}} \leq n < \frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^h}} \psi(f(n)) \right| \\ &< (c_{30} + 1) \sum_{h=0}^H (x^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^{h+1}}} 2^{-\frac{3}{4}h} + x^{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^{h+1}}} 2^{-\frac{3}{4}h}) \\ &< c_{30} (x^{\frac{7}{8}} + x^{\frac{11}{8}}) < 2c_{30} x^{\frac{11}{8}}. \end{aligned} \right.$$

Aus (102) und (103) folgt

$$(104) \quad \left| \sum_{n < \frac{x^{\frac{1}{4}}}{2^{H+1}}} \psi(f(n)) \right| < c_{31} x^{\frac{11}{8}}.$$

Bei hinreichend großem  $x$  erfüllt die Funktion  $f(u) = \frac{x}{u}$  im Intervall  $x^{\frac{1}{4}} \leq u \leq x^{\frac{1}{2}}$  Voraussetzung D mit  $k = 4$ ,  $\eta = \eta' = \frac{1}{6}$ . Denn in diesem Intervalle gelten die folgenden Abschätzungen (und zwar gleichmäßig in  $u$ )

$$(105) \quad \frac{|f''(u)|}{|f''(u)|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{h}}} = O \cdot \frac{\frac{x}{u^{\frac{1}{2}}}}{\left(\frac{x}{u^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

$$f^{(h+2)}(u) = O\left(\frac{x}{u^{h+\frac{3}{2}}}\right) \quad (h = 0, 1, 2 \text{ oder } 3)$$

und

$$\frac{1}{f''(u)} = O\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{x}\right),$$

so daß für jedes System von drei nicht-negativen ganzen Zahlen  $h_1, h_2, h_3$  mit einer Summe  $= 3$

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{|f^{(h_1+2)}(u) \cdot f^{(h_2+2)}(u) \cdot f^{(h_3+2)}(u)|}{|f''(u)|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{h}}} &= O\left(\frac{x}{u^{h_1+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x}{u^{h_2+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x}{u^{h_3+\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{x}\right)^{\frac{35}{6}}\right) \\ &= O\left(\frac{u^{\frac{11}{6}}}{x^{\frac{17}{6}}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{17}{6} - \frac{11}{6}}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right) \end{aligned} \right.$$

ist. Bei hinreichend großem  $x$  sind also für jedes  $u$  im Intervall  $a \leq u \leq b$  die linken Seiten von (105) und (106) kleiner als 1. Nach Satz 2 ist dann

$$(107) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{2}} \leq n \leq \sqrt{x} \\ x^{\frac{1}{2}} \leq u \leq \sqrt{x}}} \psi(f(n)) &= O\left(\int_{x^{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{x}} \left(\frac{x}{u^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2} + \omega} du + \sqrt{x}\right) \\ &= O(x^{\frac{1}{2} + \omega - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}) + O(\sqrt{x}) = O(x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\omega}) + O(x^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \right.$$

Aus (104) und (107) folgt, daß es eine absolute Konstante  $\Theta < \frac{1}{3}$  gibt mit der Eigenschaft

$$(108) \quad \sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi(f(n)) = O(x^{\Theta}).$$

Da bekanntlich für die durch (6) definierte Funktion  $A(x)$  die Beziehung

$$A(x) = -2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right) + O(1)^{10)}$$

gilt, folgt (7) unmittelbar aus (108) mit  $\psi(v) = v - [v] - \frac{1}{2}$ .

Rotterdam, den 15. Oktober 1922.

<sup>10)</sup> Vgl. z. B. E. Landau: *Über Dirichlets Teilerproblem* [Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse (1920), S. 13–32], S. 15–16.

## Zur Geometrie der Zahlen.

Von

Willy Scherrer in Zürich.

Minkowski hat mit den ihm eigentümlichen zahlengeometrischen Methoden folgenden Satz bewiesen: Wenn  $\xi = \alpha x + \beta y + \xi_0$  und  $\eta = \gamma x + \delta y + \eta_0$  lineare Funktionen von  $x$  und  $y$  bedeuten, deren Determinante  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  ist, so gibt es immer ganzzahlige Werte  $x, y$  von der Eigenschaft, daß die Ungleichung

$$|\xi\eta| \leq \frac{1}{4}$$

erfüllt ist. Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung und zugleich die größtmögliche Verschärfung einer Ungleichung von Tschebyscheff dar.

Im folgenden soll für diese Tatsache ein ebenfalls zahlengeometrischer Beweis auseinandergesetzt werden, der durch seine Einfachheit und Anschaulichkeit bemerkenswert ist. Als Grundlage dazu<sup>1)</sup> kommt ein Satz in Betracht, den ich an anderer Stelle auseinandergesetzt habe [Math. Annalen 86, S. 99] und dem wir für den jetzigen Zweck folgende Fassung geben wollen:

Ein in einem Einheitsgitter (dessen Fundamental-Parallelogramm also den Inhalt 1 hat) ausgebreitetes Gebiet von Volumen 1 enthält mindestens zwei Punkte, die durch einen Vektor verbunden sind, welcher gleich und parallel einem Vektor des Einheitsgitters ist.

Wir führen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $\xi, \eta$  ein. In diesem bedeute dann  $\xi_0, \eta_0$  einen beliebigen aber festen Punkt. In vektorieller Schreibweise können wir dann setzen

$$(\xi, \eta) = (\xi_0, \eta_0) + x(\alpha, \gamma) + y(\beta, \delta).$$

Wenn nun  $x$  und  $y$  alle möglichen ganzen Zahlen durchlaufen, so liefert diese Darstellung ein Gitter, in welchem die Grundvektoren  $(\alpha, \gamma)$  und  $(\beta, \delta)$  vom Punkte  $\xi_0, \eta_0$  aus auf alle möglichen Weisen abgetragen werden. Zuzufolge der Voraussetzung  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  ist dieses Gitter ein Einheitsgitter. Nun betrachten wir das durch die Ungleichung  $|\xi\eta| \leq \frac{1}{4}$

<sup>1)</sup> Dieser Satz kann in dem vorliegenden speziellen Falle ohne weiteres aus dem Minkowskischen Satz über konvexe Körper mit Mittelpunkt abgeleitet werden.

definierte Gebiet. Es wird begrenzt von vier vollständig symmetrisch um den Nullpunkt gelegenen Hyperbelästen und wir werden es der Kürze halber als Hyperbelkreuz bezeichnen. Der zu beweisende Satz kommt nun ganz einfach darauf hinaus, daß man bei schrittweiser Ausbreitung des oben beschriebenen Gitters in der Ebene einmal auf Gitterpunkte

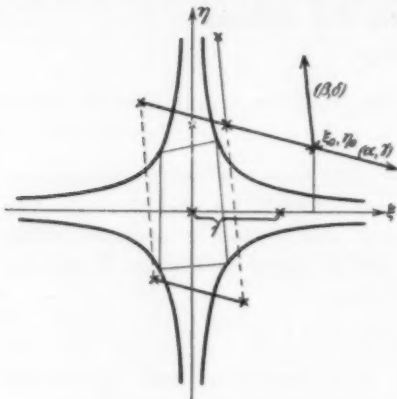


Fig. 1.

stoßen muß, welche zum Gebiet des Hyperbelkreuzes gehören. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen also an, die obige Behauptung sei nicht richtig. Zum Zwecke des Beweises betrachten wir nun irgendeines der dem Hyperbelkreuz eingeschriebenen, nach den Achsen orientierten Rechtecke, welche alle den Inhalt 1 haben. Wir wählen am einfachsten gerade das Quadrat von der Seitenlänge 1. Nach dem angeführten Hilfsatz enthält nun dieses Quadrat auf jeden Fall einen Vektor unseres Gitters.

In unserer Figur eignet sich dazu gerade der Vektor  $(\alpha, \gamma)$  (Fig. 1). Wir tragen ihn nun von  $\xi_0, \eta_0$  aus so oft ab, bis er zum ersten Male das Hyperbelkreuz überbrückt. Diese Überbrückung kann nur über einem Ast, nie aber zum diametral gegenüberliegenden Gebiet erfolgen. Das ist eigentlich schon evident nach der Art und Weise, wie wir den Vektor aus dem Quadrat entnommen haben und kann folgendermaßen sichergestellt werden: Wir nehmen an, der Vektor führe vom Punkte  $\xi_1, \eta_1$  zum Punkte  $-\xi_2, -\eta_2$ , wobei natürlich gilt  $\xi_1 \eta_1 > \frac{1}{4}$  und  $\xi_2 \eta_2 > \frac{1}{4}$ . Da der Vektor im Quadrat enthalten ist, so ist die Summe seiner absolut genommenen rechtwinkligen Komponenten höchstens gleich  $1 + 1 = 2$ . Andererseits aber müßte sich ergeben für diese Summe

$$+ \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 > \xi_1 + \frac{1}{4\xi_1} + \xi_2 + \frac{1}{4\xi_2} = \frac{1}{2} \left( 2\xi_1 + \frac{1}{2\xi_1} + 2\xi_2 + \frac{1}{2\xi_2} \right) \geq \frac{1}{2} (2 + 2) =$$

also  $\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 > 2$ , was einen Widerspruch bedeutet. Nun betrachten wir alle „Brücken“, welche über den gleichen Arm gehen. Unter ihnen ist eine dem Ursprung am nächsten. Ganz das gleiche gilt für den entgegengesetzten Arm. Die beiden so gefundenen, dem Zentrum nächsten Vektoren ergänzen wir zu einem Parallelogramm. Dieses Parallelogramm enthält nun weder in seinem Innern noch auf dem Rande weitere Gitterpunkte, denn sonst würde einer der beiden Vektoren nicht der dem Zentrum nächste sein. Daraus aber folgt weiter, daß dieses Parallelogramm den Inhalt 1 hat.

Nun enthält aber das Parallelogramm ganz in seinem Innern immer Vierecke, deren vier Ecken auf den vier verschiedenen Hyperbelastén liegen. Der Inhalt eines solchen Vierecks ist aber mindestens gleich 1, wie man folgendermaßen zeigt. Man zerlege das Viereck vom Ursprung aus nach den vier Ecken in vier Dreiecke. Wir betrachten eines dieser Dreiecke, etwa dasjenige, dessen äußere Ecken  $\xi_1, \eta_1$  und  $-\xi_2, \eta_2$  im ersten und zweiten Quadranten liegen. Sein Inhalt ist gleich  $\frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \xi_1 & \eta_1 \\ -\xi_2 & \eta_2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1)$ ; nun gilt aber  $\xi_1 \eta_1 = \frac{1}{4}$  und  $\xi_2 \eta_2 = \frac{1}{4}$ , also folgt  $\frac{1}{2} (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_1}{4 \xi_2} + \frac{\xi_2}{4 \xi_1} \right) = \frac{1}{8} \left( \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) \geq \frac{1}{4}$  und das gilt von jedem der vier Dreiecke. Hiermit ist die vorige Behauptung dargetan und es ergibt sich somit ein Widerspruch. Der an die Spitze gestellte Lehrsatz ist also bewiesen.

Im folgenden sollen noch einige weitere Anwendungen des oben zugrunde gelegten zahlentheoretischen Satzes gegeben werden. Dabei soll er gerade in der angegebenen Form zur Verwendung gelangen. Die Übertragung auf diejenigen Fälle, wo nicht gerade ein Einheitsgitter zugrunde liegt, kann dann leicht durch Volumenumrechnung geschehen. Außerdem beschränken wir der Einfachheit halber vorerst unsere Darlegungen auf ebene Bereiche. Man sieht dann ohne weiteres, daß sie auch für Gebiete von beliebiger Dimensionszahl gelten.

Es sei also in einer Ebene ein Einheitsgitter ausgebreitet. Wir denken uns nun von irgendeinem Punkte, etwa dem Nullpunkte, ausgehend einen Halbstrahl und fragen nun, wie lang dieser Halbstrahl sein muß, damit mindestens einer seiner Punkte von einem vom Ursprung verschiedenen Gitterpunkte in der Entfernung um weniger als die vorgegebene Größe  $\delta$  abweicht. Zu dem Zwecke konstruieren wir um unseren Halbstrahl als Mittellinie einen rechteckigen Streifen von der Breite  $\delta$ . Das Volumen dieses Streifens ist gleich  $l\delta$ , wenn  $l$  die Länge des Strahles bezeichnet. Unser Satz sagt nun aus, daß wir in diesem Streifen einen Gittervektor antreffen müssen, falls nur  $l\delta \geq 1$  ist. Diesen Gittervektor verschieben wir nun parallel mit sich selbst derart, daß sein dem Ursprung näheres Ende in  $O$  zu liegen kommt. Dann fällt natürlich das andere Ende auf einen Gitterpunkt, dessen senkrechte Entfernung vom Halbstrahl schlimmstenfalls verdoppelt worden ist. Da sie aber vor der Verschiebung im Maximum  $\frac{\delta}{2}$  betrug, so ist sie nun höchstens gleich  $\delta$ . Wir kommen also zum einfachen Resultat, daß es immer Gitterpunkte gibt, welche um weniger als die vorgegebene Größe  $\delta$  vom Halbstrahl abliegen, sofern nur seine Länge größer ist als  $\frac{1}{\delta}$ . Diesen Schluß hätte man auch direkt aus dem Minkowskischen Satze über konvexe Körper mit Mittelpunkt ziehen können.

Nun betrachten wir wiederum von  $O$  ausgehend eine geradlinige Reihe äquidistanter Punkte (eindimensionales Gitter) und wollen nun fragen, wie weit man diese Reihe führen muß, bis man unter ihren Punkten einen antrifft, dessen relative Koordinaten zu einem Gitterpunkt gemessen in bezug auf ein quadratisches Einheitsgitter höchstens gleich der vorgegebenen Größe  $\delta$  sind. Die Art und Weise, wie hier die Distanz gemessen wird, ist natürlich in gewissem Grade willkürlich. Wir haben unsere Festsetzungen möglichst anschaulich gewählt. Man hätte sich auch nach dem gegebenen, im allgemeinen parallelogrammatischen Gitter richten können. Unsere Reihe soll mit dem Nullpunkt  $n$  Punkte enthalten. Um jeden dieser Punkte als Zentrum legen wir nun ein nach den Achsen des quadratischen Einheitsgitters orientiertes Quadrat von der Seitenlänge  $\delta$ . Die Größe  $\delta$  muß so klein sein, daß keine Überdeckungen vorkommen. Dann bedecken die Quadrate das Volumen  $n\delta^2$ . Nun nehmen wir  $n$  so an, daß  $n\delta^2 \geq 1$  wird und wenden unseren Satz an, da er auch für unzusammenhängende Gebiete Gültigkeit hat, wenn nur keine Überdeckungen vorkommen. Es muß also ein Gittervektor vorhanden sein, dessen Enden in dem von den Quadraten bedeckten Gebiete liegen. Wenn nun zufällig das dem Ursprung nähere Ende dieses Vektors nicht in dem zum Ursprung gehörigen quadratischen Gebiete liegt, so kann man ihn ohne weiteres parallel mit sich selbst derart zurückschieben, daß diese Bedingung erfüllt ist. Dabei kommt das andere Ende in ein entsprechendes Quadrat zu liegen, wo es die genau gleiche Lage wie vorher einnimmt. Nun wird der Vektor wie bei der vorausgehenden Überlegung noch einmal parallel verschoben, so daß sein Anfang in den Ursprung zu liegen kommt, dann aber kommt sein Ende ebenfalls auf einen Gitterpunkt zu liegen und außerdem gilt hier wie bei der vorigen Überlegung, daß das Ende dabei in Höhe und Breite um weniger als  $\delta$  vom Mittelpunkt des zugehörigen Quadrates abliegen kann. Dieser Mittelpunkt ist aber ein Punkt unserer Reihe. Wir haben somit folgendes Resultat erhalten:

*Sobald die Zahl  $n$  der Punkte unserer Reihe  $\geq 1/\delta^2$  ist, findet man unter ihren Punkten mindestens einen, der in Höhe und Breite höchstens um den Betrag  $\delta$  von einem Gitterpunkte abweicht.*

Dieses einfache Resultat hängt also nicht explizite von der Distanz der Punkte unserer Reihe ab. Indem wir uns nun zu Gittern von beliebig vielen Dimensionen wenden, wollen wir schließlich die allgemeinste Folgerung anführen, die man im Sinne der obigen Überlegungen ziehen kann (dabei wird sich von neuem die zahlengeometrische Bedeutung der konvexen Bereiche mit Mittelpunkt zeigen).

Gegeben sei ein  $n$ -dimensionales, im übrigen beliebiges Gitter, dessen Fundamentalparallelepiped das Volumen  $\Delta$  habe. Vom selben Ursprung



ausgehend sei ein zweites Gitter konstruiert, dessen Dimensionzahl  $m \leq n$  sei. Es soll also eine Aussage gewonnen werden darüber, wie rasch sich dieses zweite Gitter dem ersten nähert, oder anders ausgedrückt, wie weit man eine Umgebung um  $O$  abgrenzen muß, bis daß sich in ihr Punkte des zweiten Gitters finden, die beliebig wenig von Punkten des ersten Gitters abweichen. Als Grundlage für das Maß der Abweichung soll wiederum ein würfelförmiges Einheitsgitter dienen, in dem Sinne, daß wir uns um die Punkte des zweiten Gitters als Zentrum würfelförmige Bereiche von der beliebig kleinen Breite  $\delta$  gelegt denken, die nach diesem Einheitsgitter orientiert sind.

Nun werde ein konvexer Bereich  $B'$  mit dem Ursprung als Mittelpunkt abgegrenzt, der eine Anzahl  $N$  von Punkten des zweiten Gitters enthalte, die mindestens gleich ist der Größe  $\frac{A}{\delta^n}$ . Dieser Bereich  $B'$  soll in einem umfassenderen Bereich  $B$  übergeführt werden, indem man seine sämtlichen Halbmesser vom Ursprung aus im Verhältnis 1:2 dilatiert. Dann gilt folgende Tatsache:

*Der Bereich  $B$  enthält mindestens zwei Punkte des zweiten Gitters, deren relative Koordinaten in bezug auf zwei Punkte des ersten Gitters kleiner sind als  $\delta$ .*

**Beweis.** Die würfelförmigen Umgebungen der  $N$  in  $B'$  enthaltenen Punkte des zweiten Gitters bedecken das Volumen  $N\delta^n$ . Nach der Voraussetzung gilt aber nun  $N\delta^n \geq A$ ; also ergibt sich, indem man den an die Spitze gestellten Satz mit veränderter Maßeinheit anwendet, daß ein Vektor des zweiten Gitters vorhanden sein muß, dessen Enden zu zwei solchen Würfeln gehören. Diesen Vektor verschieben wir nun so parallel mit sich selbst, daß das eine Ende in den Nullpunkt zu liegen kommt. Dabei fällt das andere Ende auf jeden Fall noch in den Bereich  $B$ , in Folge der vorausgesetzten Konvexität. Außerdem befindet es sich dann in der Nähe eines Punktes des zweiten Gitters, von dem es in irgendeiner Koordinatenrichtung höchstens um die Größe  $\delta$  abweichen kann. Da dieses Ende aber ein Gitterpunkt ist und überdies die Wahl der Enden freisteht, so ist unser Satz bewiesen<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Es mag noch erwähnt werden, daß der letzte Satz in sich einen Beweis enthält für den geometrischen Teil des bekannten Lehrsatzes, wonach eine Funktion von  $n$  Variablen nicht mehr als  $2n$  unabhängige Perioden haben kann. Die gleichen Resultate können durch Hinzufügung weiterer Dimensionen direkt aus dem Minkowskischen Satze abgeleitet werden.

## Bestimmung aller algebraischen $W$ -Kurven.

Von

Hans Mohrmann in Basel.

---

### Inhaltsübersicht.

Einleitung, Aufgabe.

- I. Sämtliche singulären Zweige einer algebraischen  $W$ -Kurve müssen notwendig einem und demselben Simplex angehören.
- II. Bestimmung aller irreduziblen algebraischen Kurven, deren sämtliche singulären Zweige einem und demselben Simplex angehören.
- III. Alle algebraischen Kurven, deren sämtliche singulären Zweige einem und demselben Simplex angehören, sind  $W$ -Kurven; analytische Darstellung.

### Einleitung.

Im folgenden will ich eine, wie mir scheint, überaus durchsichtige Bestimmung *aller algebraischen*, von Klein<sup>1)</sup> und Lie<sup>1)</sup> sogenannten  $W$ -Kurven des  $r$ -dimensionalen Raumes ( $r \geq 2$ ) geben, d. h. *aller irreduziblen algebraischen Kurven, die eine kontinuierliche Gruppe von automorphen Kollineationen ihres Einbettungsraumes gestatten*. Die Mittel, die ich benutze, gehören ausschließlich der Theorie der algebraischen Kurven an, so daß sich die Aufstellung und Integration des Systems von Differentialgleichungen, denen alle  $W$ -Kurven genügen, für die Ermittlung der algebraischen als nicht erforderlich erweist. Wir werden vielmehr sehen, daß unsere Aufgabe äquivalent ist mit der anderen: *alle irreduziblen algebra-*

---

<sup>1)</sup> F. Klein et S. Lie: Deux notes sur une certaine famille de courbes et de surfaces, C. R. Paris 70 (1870), wiederabgedruckt im 1. Band von Kleins Ges. Abh., Berlin 1921, S. 145 ff.

ischen Kurven zu ermitteln, deren sämtliche singulären Zweige<sup>2)</sup> einem und demselben Simplex angehören.

Als Simplex bezeichnen wir dabei, wie üblich, die Figur von  $r + 1$  Punkten, die keinem Raume von weniger als  $r$  Dimensionen angehören, samt ihren  $k$ -dimensionalen linearen Verbindungsräumen ( $k = 1, 2, \dots, r - 1$ ). Und von einem singulären Zweige einer Kurve sagen wir, er gehöre einem gegebenen Simplex an, wenn sein Ursprung, seine Tangente und allgemein sein  $k$ -dimensionaler Schmiegungraum bezüglich mit einer Ecke, einer Kante und allgemein mit einem  $k$ -dimensionalen Raum jenes Simplex zusammenfallen.

Wir gewinnen auf unserem Wege einige Sätze über algebraische Kurven, die, wie ich glaube, auch an und für sich einiges Interesse beanspruchen dürfen, wie z. B. die folgenden: *Es gibt keine algebraische Kurve mit (einem und) nur einem singulären Zweige. Eine algebraische Kurve mit nicht mehr als zwei singulären Zweigen ist notwendig rational und von gleicher Ordnung und Klasse, usw.*

Die Lösung unserer Aufgabe gliedert sich naturgemäß in drei Schritte:

1. wollen wir zeigen, daß sämtliche singulären Zweige einer algebraischen  $W$ -Kurve einem und demselben Simplex angehören müssen; 2. wollen wir alle derartigen Kurven bestimmen und 3. wollen wir beweisen, daß sie sämtlich  $W$ -Kurven sind.

### I.

**Sämtliche singulären Zweige einer algebraischen  $W$ -Kurve gehören notwendig einem und demselben Simplex an.**

Der erste Schritt ist leicht getan. Gestattet eine Kurve eine *kontinuierliche* Gruppe von automorphen Kollineationen ihres  $r$ -dimensionalen Einbettungsraumes, so befindet sich unter diesen sicher eine, die beliebig oft wiederholt, zu beliebig vielen verschiedenen Kollineationen der Gruppe führt. Angenommen, diese Kollineation — wir wollen sie die allgemeine nennen — habe mehr als  $r + 1$ , also unendlich viele Fixpunkte, so müßte die Kurve, da eine beliebige ihrer Schmiegungs-Hyperebenen<sup>3)</sup> allgemeiner Lage in eine ebensolche andere übergeführt wird, und jede Hyperebene mit dem Ort der (unendlich vielen) Fixpunkte der allgemeinen Kollineation mindestens einen Punkt gemein hat, beliebig viele Schmiegungs-Hyperebenen besitzen, die durch (wenigstens) einen Punkt hindurchgehen,

<sup>2)</sup> Die Erklärung eines singulären Zweiges einer algebraischen Kurve wird zu Beginn von II in Erinnerung gebracht.

<sup>3)</sup> Unter Hyperebene eines  $r$ -dimensionalen Raumes verstehen wir, wie üblich, einen  $(r - 1)$ -dimensionalen linearen Raum desselben.

was der Voraussetzung einer irreduziblen algebraischen Kurve (Envelope) des  $r$ -dimensionalen Raumes widerspricht. Die in Frage stehende allgemeine Kollineation kann daher nur  $r+1$  Fixpunkte haben. Sie kann aber auch die singulären Zweige der Kurve nur in sich selbst transformieren. Die Ursprünge dieser, sowie ihre Tangenten und allgemein  $k$ -dimensionalen Schmiegräume müssen daher notwendig Fixelemente der allgemeinen Kollineation sein. Einerlei, ob diese sämtlich voneinander verschieden oder ob einige von ihnen oder alle zusammengerückt sind: die singulären Zweige der Kurve müssen notwendig sämtlich (wenigstens) einem und demselben Simplex angehören. Das gibt den

**Satz 1.** *Die irreduziblen algebraischen  $W$ -Kurven sind unter denjenigen Kurven zu suchen, deren sämtliche singulären Zweige einem und demselben Simplex (ihres Einbettungsraumes) angehören.*

## II.

**Bestimmung aller irreduziblen algebraischen Kurven, deren sämtliche singulären Zweige einem und demselben Simplex angehören.**

Die Punkte in der Nachbarschaft eines beliebigen Punktes einer irreduziblen algebraischen Kurve mit  $r$ -dimensionalem Einbettungsraum liegen auf einem oder mehreren Zweigen oder Zyklen<sup>4)</sup>, deren jeder durch ein Symbol der Form

$$(1) \quad (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r-1})$$

charakterisiert werden kann, wo die  $\alpha$  ganze Zahlen  $\geq 1$  bedeuten. Sind alle  $\alpha = 1$ , so handelt es sich um einen *regulären*, andernfalls um einen *singulären* Zweig der Kurve. Die  $\alpha$  haben dabei folgende Bedeutung: Jedem Zweig mit dem Ursprung  $O_0$  ist eine durch  $O_0$  hindurchgehende Gerade  $O_1$ , eine durch  $O_1$  hindurchgehende Ebene  $O_2$ , allgemein ein  $k$ -dimensionaler  $O_k$  (der Schmiegrungs- $O_k$  des Zweiges in  $O_0$ ) zugeordnet derart, daß eine Hyperebene durch  $O_0$ , aber nicht durch  $O_1$ ; eine Hyperebene durch  $O_1$ , aber nicht durch  $O_2$ ; allgemein eine Hyperebene durch  $O_k$ , aber nicht durch  $O_{k+1}$  ( $k \leq r-2$ ) bezüglich

$$\alpha_0; \alpha_0 + \alpha_1; \dots; \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$$

am Ursprung  $O_0$  liegende Schnittpunkte mit dem Kurvenzweige gemein hat. Der  $O_{r-1}$  endlich, die Schmiegrungs-Hyperebene des Kurvenzweiges in  $O_0$ , hat  $\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i$  bei  $O_0$  liegende Punkte mit dem Zweige gemein.

<sup>4)</sup> Die Koordinaten der Punkte eines solchen Zweiges in der Nachbarschaft des Ursprungs lassen sich durch Reihen von ganzen Potenzen eines Parameters darstellen. (Vgl. Enzykl. d. M. W. III C. 7 (Segre) S. 879.)

Ist eine der Zahlen  $\alpha = 2$ , während alle übrigen 1 sind, so hat man ein gewöhnliches stationäres Element. Das Symbol  $(2, 1, 1, \dots, 1)$  kennzeichnet z. B. einen gewöhnlichen stationären Punkt (Spitze);  $(1, 2, 1, 1, \dots, 1)$  eine gewöhnliche stationäre Tangente usw.

Wir wollen allgemein von einem Zweige mit der Charakteristik

sagen, er vereinige

(2)  $(\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r-1})$

$\sum_{i=0}^{r-1} (\alpha_i - 1)$

stationäre Elemente der Kurve.

Diese stationären Elemente einer algebraischen Kurve sind nun mit ihren Rängen  $n_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, r-1$ ) und ihrem Geschlecht  $p$  durch die folgenden Segreschen Formeln<sup>5)</sup> verknüpft, die eine Ausdehnung bekannter Plückerischer Formeln auf den Raum von  $r$  Dimensionen sind:

[illegible]

wo die Summationen sich über alle singulären Zweige der Kurve erstrecken. Durch Addition dieser  $r$  Formeln ergibt sich die folgende für die weitere Diskussion grundlegende Formel (4):

$$(4) \quad 2r(p-1) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum (\alpha_k - 1) - n_0 - n_{r-1},$$

in der nur der 0-te und der  $(r-1)$ -te Rang, d. h. die *Ordnung* und *Klasse* der Kurve auftreten.

Bezeichnet man die Überschüsse der Ordnung und der Klasse einer algebraischen Kurve über die Ordnung und Klasse der rationalen Normalkurve (d. i. der primitivsten Kurve) ihres Einbettungsraumes mit  $n'$  bzw.  $m'$ , so daß also

$$n = n_0 = n' + r, \quad m = n_{-1} = m' + r$$

ist, so läßt sich die Formel (4) in der folgenden Form (4\*) schreiben:

$$(4^*) \quad \sum_{k=0}^{r-1} \sum (\alpha_k - 1) = n' + m' + 2rp.$$

In Worten gibt das den

**Satz 2.** Die Summe der stationären Elemente einer irreduziblen algebraischen Kurve ist gleich der Summe der Überschüsse ihrer Ordnung

<sup>5)</sup> Vgl. Enzykl. d. M. W. III C. 7 (Segre), S. 883; siehe auch Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, S. 459.

und ihrer Klasse über die Dimension ihres Einbettungsraumes vermehrt um das doppelte Produkt dieser Dimension in das Geschlecht der Kurve.

So hat z. B. eine gewundene Kurve 4. Ordnung und 4. Klasse entweder einen stationären Punkt und eine stationäre Ebene oder aber zwei stationäre Tangenten. Die beiden stationären Elemente können in keinem Falle zusammenrücken. Vielmehr folgert man aus (4\*) ohne Mühe den allgemeinen

**Satz 3.** *Außer den rationalen Normalkurven, deren sämtliche Punkte regulär sind, hat jede algebraische Kurve wenigstens zwei verschiedene singuläre Zweige.*

Denn ein Zweig einer algebraischen Kurve, der  $\nu$  stationäre Elemente vereinigt, für den also

$$\sum_{k=0}^{r-1} (\alpha_k - 1) = \nu$$

ist, bedingt mindestens die Ordnung

$$n = \nu + r$$

und dual die Klasse

$$m = \nu + r,$$

d. h. es ist notwendig:

$$(5) \quad n' \geq \nu \quad \text{und} \quad m' \geq \nu,$$

so daß aus (4\*) die Unmöglichkeit der Konzentration der stationären Elemente an einer Stelle unmittelbar folgt.

Die Annahme zweier singulärer Zweige ist indessen, wie schon die angeführten Beispiele der beiden gewundenen Kurven 4. Ordnung und 4. Klasse lehren, wohl möglich. Prüfen wir allgemein ihre Voraussetzungen!

Der erste singuläre Zweig vereinige  $\nu$ , der zweite  $\mu$  stationäre Elemente der Kurve (in dem erklärten Sinne) und es sei:

$$(6) \quad \nu \geq \mu.$$

Alsdann hat man, wie früher,

$$(5) \quad n' \geq \nu, \quad m' \geq \nu,$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die Schmiegungs-Hyperbene des ersten Zweiges keinen weiteren Punkt der Kurve enthält und dual durch seinen Ursprung keine weitere Schmiegungs-Hyperebene hindurchgeht. Aus (5) folgt durch Addition:

$$(7) \quad n' + m' \geq 2\nu.$$

Andererseits ist wegen (4\*)

$$(8) \quad n' + m' = \nu + \mu - 2rp$$

also, wegen (6)

$$(8^*) \quad n' + m' \leq 2v - 2rp.$$

Die Relationen (7) und (8\*) sind nur miteinander verträglich, wenn in beiden das Gleichheitszeichen gilt und außerdem  $p = 0$  ist. Daraus ergibt sich unmittelbar der

**Satz 4.** *Eine algebraische Kurve, die zwei und nur zwei singuläre Zweige aufweist, ist rational und von gleicher Ordnung und Klasse. Die beiden singulären Zweige vereinigen gleichviele stationäre Elemente der Kurve, und die Schmiegungs-Hyperebene des einen Zweiges enthält den Ursprung des anderen nicht (et vice versa), so daß die beiden singulären Zweige ein (nicht ausgeartetes) Schmiegungs-Simplex bestimmen.*

Wir wollen nunmehr zeigen, daß andere irreduzible algebraische Kurven, deren sämtliche singulären Zweige einem und demselben Simplex angehören, als die Kurven des 4. Satzes (mit der Minimalzahl singulärer Zweige) *nicht existieren*. Nach Satz 3 hat, von den rationalen Normalkurven abgesehen, jede algebraische Kurve mindestens zwei singuläre Zweige. Wir betrachten einen dieser Zweige. Er möge  $v$  stationäre Elemente vereinigen und sein Ursprung heiße I. Wir ordnen ihm in irgendeiner Weise  $r$  (von I und voneinander verschiedene) mit I ein Simplex bildende Punkte zu, von denen einer — wir nennen ihn II — der Schmiegungs-Hyperebene des Ausgangszweiges nicht angehört, während die übrigen bezüglich auf der Tangente, in der Schmiegungebene usw. jenes Ausgangszweiges liegen. Wir müssen zeigen, daß nicht sämtliche singulären Zweige der algebraischen Kurve mit ihren Tangenten, Schmiegungebenen usw. in den Ecken, Kanten, Ebenen usw. des bezeichneten  $(r+1)$ -Flachs liegen können, den Fall des Satzes 4 ausgenommen.

Außer dem ( $v$  stationäre Elemente vereinigenden) Ausgangszweige, der in I seinen Ursprung hat, enthalte unsere Kurve der Ordnung  $n = n' + r$  und Klasse  $m = m' + r$  noch  $a$  singuläre Zweige, auf die sich die

$$\sum_{k=0}^{r-1} \sum (u_k' - 1) = n' + m' + 2rp - v$$

weiteren stationären Elemente der Kurve verteilen müssen. Diese  $a$  Zweige lassen sich nach dem Verhalten ihrer Schmiegungs- $O_k$  bezüglich den Ecken I und II folgendermaßen rubrizieren: die Schmiegungs- $O_k$  sind entweder

1. weder mit I noch mit II inzident; oder
2. nur mit I inzident; oder
3. nur mit II inzident; oder
4. mit I und mit II inzident.

Kennzeichnen wir die einem der  $\alpha$  singulären Zweige

$$(\alpha'_0 \alpha'_1 \dots \alpha'_{r-1})$$

zugeordneten Zahlen  $\alpha'_i$  im ersten Falle ohne weiteren Index, im zweiten Falle mit dem Index I, im dritten mit dem Index II und im vierten endlich mit III, so enthält der Schmiegungs- $O_{r-1}$  des Ausgangszweiges, der also durch die Simplexecke II nicht hindurchgeht, mindestens:

$$\begin{aligned} \nu + r + \sum \alpha'_0 + \sum \alpha'_1 + \dots + \sum \alpha'_{r-1} \\ + \sum \alpha'_{0I} + \sum \alpha'_{1I} + \dots + \sum \alpha'_{r-1I} \end{aligned}$$

Punkte unserer Kurve. Dual gehen durch I mindestens

$$\begin{aligned} \nu + r + \sum \alpha'_{0I} + \sum \alpha'_{1I} + \dots + \sum \alpha'_{r-1I} \\ + \sum \alpha'_{0II} + \sum \alpha'_{1II} + \dots + \sum \alpha'_{r-1II} \end{aligned}$$

Schmiegungs-Hyperebenen der Kurve hindurch, wobei sich die Summationen über alle  $\alpha$  von dem Ausgangszweig verschiedenen singulären Zweige erstrecken. Es ist mithin:

$$(9) \quad \begin{cases} n \geq \nu + r + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_k + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kI} \\ m \geq \nu + r + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kI} + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kII} \end{cases}$$

Ebenso findet man durch Betrachtung der Simplexecke II und der ihr zugeordneten I nicht enthaltenden  $(r-1)$ -dimensionalen Simplexwand:

$$(10) \quad \begin{cases} n \geq \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_k + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kII} \\ m \geq \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kII} + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kI} \end{cases}$$

Aus (9) und (10) erhält man durch Addition:

$$\begin{aligned} 2(n+m) \geq 2\nu + 2r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_k + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kI} \\ + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kII} + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kI} \end{aligned}$$

und daraus, wegen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_k + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kI} + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kII} + \sum_{k=0}^{r-1} \sum \alpha'_{kI} &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum (\alpha'_k - 1) \\ &+ \sum_{k=0}^{r-1} \sum (\alpha'_{kI} - 1) + \sum_{k=0}^{r-1} \sum (\alpha'_{kII} - 1) + \sum_{k=0}^{r-1} \sum (\alpha'_{kI} - 1) \\ &+ ar = n' + m' + 2rp - \nu + ar \end{aligned}$$





sein muß. Man braucht hierzu nur der Forderung Ausdruck zu geben, daß außer in den Punkten  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$  keine Schmiegungs-Hyperebene mehr als  $r$  zusammengerückte Punkte mit der Kurve gemein haben darf, daß mithin die Wronskische Determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ x_0' & x_1' & x_2' & \dots & x_r' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(k)} & x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \dots & x_r^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(r)} & x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & \dots & x_r^{(r)} \end{vmatrix} = W(\lambda),$$

wo die oberen Indizes  $(k)$   $k$ -malige Differentiation nach dem Parameter  $\lambda$  bedeuten, gleich Null gesetzt, als Gleichung in  $\lambda$  keine andern Wurzeln als Null und Unendlich haben darf. Zerlegt man  $W(\lambda)$  den Aggregaten der einzelnen Koordinaten entsprechend in Summanden der Form:

$$c_0 \cdot \begin{vmatrix} x_0 & \dots & X_k & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(k)} & \dots & X_k^{(k)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(r)} & \dots & X_k^{(r)} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

wo  $X_k$  ein Glied in dem Ausdruck für  $x_k$  bedeutet, so enthalten *sämtliche Glieder jeder Teildeterminante  $\lambda$  in der gleichen Potenz*. Diese Teildeterminanten können z. T. einzeln verschwinden (wenn gleiche Potenzen von  $\lambda$  in einer Zeile vorkommen), zum Teil können sie sich gegeneinander aufheben. Jedenfalls aber gibt es, falls nicht sämtliche

$$l'_k = l_k$$

sind, eine Teildeterminante, die in bezug auf  $\lambda$  vom *höchsten* Grade, und eine die vom *niedrigsten* Grade in  $\lambda$  ist. Diese Determinanten verschwinden weder einzeln, noch können sie sich gegeneinander aufheben. Soll also  $W(\lambda) = 0$  keine anderen Wurzeln als  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$  haben, so ist notwendig

$$l'_k = l_k \quad (k = 1, 2, \dots, r-1).$$

Das gibt den

**Satz 7.** *Die homogenen Punktkoordinaten  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, r$ ) einer algebraischen Kurve mit höchstens zwei singulären Zweigen lassen sich immer in der Form*

$$(12) \quad x_k = c_k \lambda^{l_k}$$

*schreiben, wo die  $l_k$  positive ganze Zahlen sind. (Dabei können die  $c_k$  ohne Beschränkung sämtlich gleich 1 gesetzt werden.)*

Aus der analytischen Darstellung (12) der Kurven unseres 4. bzw. 6. Satzes erkennt man nun unmittelbar, daß sie sämtlich *W*-Kurven sind. Jede gestattet nämlich sicher die Gruppe von automorphen Kollineationen, die durch die linearen Substitutionen

$$(13) \quad \lambda^* = A\lambda$$

in ihrem Einbettungsraume induziert werden, die also die beiden singulären Zweige einzeln festhalten. Ist die Ordnung  $n$  der Kurve gleich der Dimension  $r$  ihres Einbettungsraumes, d. h. handelt es sich um eine rationale Normalkurve, so gestattet sie die dreigliedrige Gruppe von automorphen Kollineationen, die durch die Gesamtheit der linearen Substitutionen des von ihr getragenen binären Gebietes induziert wird.

Da eine automorphe Kollineation einer Kurve ihre singulären Zweige in ihrer Gesamtheit stehen lassen, sie also entweder einzeln festhalten oder miteinander vertauschen muß, so können zu den durch die Substitutionen (13)  $\lambda^* = A\lambda$  induzierten automorphen Kollineationen der Kurve (12) nur noch diejenigen hinzutreten, die durch die linearen Substitutionen

$$(14) \quad \lambda^* = \frac{B}{\lambda}$$

induziert werden. Es sind dies *involutorische* (axiale) Kollineationen, die für sich keine Gruppe bilden, und die dann und nur dann auftreten, wenn jedem  $l_k$  der Kurven (12) ein  $l_i$

$$l_i = l_{r-k}$$

derart zugeordnet werden kann, daß

$$(15) \quad l_i = l_{r-k} = n - l_k$$

( $k = 0, 1, 2, \dots, r$ ) ist, was bei *geradem*  $r$  eine *gerade Ordnung* voraussetzt (da hier ein  $l_k$ , nämlich  $l_k = l_r = \frac{n}{2}$  sein muß), somit erst für  $r \geq 4$  in Frage kommt. (Für  $r = 2$  kann man immer einen neuen Parameter  $\mu = \lambda^{\frac{n}{2}}$  einführen, so daß sich hier nur die rationale Normalkurve, der Kegelschnitt ergibt.)

Von den rationalen Normalkurven abgesehen, gestattet also keine algebraische Kurve eine mehr als *eingliedrige* automorphe Kollineationsgruppe. Es gilt vielmehr in Übereinstimmung mit einem allgemeinen Lieschen Satze<sup>6)</sup> der

**Satz 8.** *Es gibt keine algebraische Kurve mit einer im Lieschen Sinne zwei- und nur zweigliedrigen automorphen Kollineationsgruppe.*

<sup>6)</sup> Vgl. Lie-Engel: Transformationsgruppen 3 (1893) S. 187.

Endlich formulieren wir noch das **Haupttheorem**:

**Satz 9.** Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine algebraische Kurve eine *W*-Kurve ist, besteht darin, daß sie nicht mehr als zwei singuläre Zweige besitzt<sup>7)</sup>. Die nicht-homogenen Koordinaten jeder derartigen Kurve lassen sich als ganze rationale Potenzen eines Parameters  $\lambda$  ausdrücken:

$$x_k = \lambda^{l_k} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Daß nicht auch die Gleichungen aller transzendenten *W*-Kurven auf die Form

$$x_k = \lambda^{l_k} \quad (k = 1, 2, \dots, r) \\ (l_k \text{ konst.})$$

gebracht werden können, beweist z. B. in der Ebene die *Exponentiallinie*

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = e^\lambda \end{cases}$$

und im Raum die gemeine *Schraubenlinie*

$$\begin{cases} x = a \cos \lambda \\ y = a \sin \lambda \\ z = b \lambda \end{cases} \quad (a, b \text{ konstant}),$$

deren automorphe Kollineationen durch die linearen Substitutionen

$$\lambda^* = \lambda + c$$

induziert werden, die somit zwei *zusammenfallende* Fixpunkte auf der Kurve haben, was bei den algebraischen *W*-Kurven niemals eintreten kann, es sei denn, daß es sich um eine rationale Normalkurve handelt. In letzterem Falle koinzidieren, wie eine leichte Rechnung ergibt, sogleich sämtliche  $r + 1$  Fixpunkte der allgemeinen Kollineation der Gruppe. Man gewinnt so den

**Satz 10.** Sind die Bahnkurven einer eingliedrigen projektiven Gruppe des  $r$ -dimensionalen Raumes  $(r - 1)$ -fach gekrümmte algebraische Kurven, so sind die Fixpunkte der allgemeinen Kollineation der Gruppe entweder sämtlich voneinander getrennt oder sie fallen sämtlich zusammen.

Bei allen anderen Konfigurationen der  $r + 1$  Fixpunkte sind die Bahnkurven also notwendig *transzendent*. Hierin liegt eine Rechtfertigung für die gesonderte Behandlung der algebraischen *W*-Kurven.

<sup>7)</sup> Vgl. hiermit die Bedingungen, die G. Marietta, Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), S. 384 aufgestellt hat.

Wir schließen mit der Bemerkung, daß *jede* algebraische  $W$ -Kurve auch eine Schar von  $\infty^1$  *automorphen Reziprozitäten*, und zwar *Polaritäten* gestattet, was wir an anderer Stelle zu zeigen beabsichtigen, wo wir auch auf die zahlreichen eleganten Eigenschaften der bereits erwähnten besonderen  $W$ -Kurven eingehen wollen, die eine schon im Komplexen gemischte eingliedrige automorphe Kollineationsgruppe gestatten, und die in Räumen *ungerader* Dimension immer einem *Null-System* angehören.

Hannover, den 26. September 1922.

(Eingegangen am 14. 10. 1922.)

## La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi.

Von

Annibale Comessatti in Padua (Italian).

Il presente lavoro prelude ad una più ampia ricerca dedicata alla teoria geometrica delle forme binarie, secondo un indirizzo che ho già concisamente indicato in alcune pubblicazioni italiane<sup>1)</sup>. Esso ne raccoglie e coordina opportunamente le premesse, ne fissa le notazioni, e va concepito non come avente fine a se stesso, ma scopo prevalentemente introduttivo.

Le proprietà della curva razionale normale e dei suoi gruppi proiettivi (cioè dei gruppi di omografie dello spazio ambiente che la mutano in se stessa) vengono qui esaminate, nei loro rapporti colle forme binarie, alla stregua di un noto e fecondo *principio di trasporto*<sup>2)</sup>, sul quale s'impone, nell'ordine di vedute di queste ricerche, la concezione geometrico-grupale dei problemi di teoria delle forme.

Com'è ben naturale, dato il genere di questioni trattate, il lettore s'imbatterà spesso in risultati noti, ai quali, per ragioni d'organicità e

<sup>1)</sup> *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie* [Rendic. Accad. Lincei 29 (1920), S. 313-316, 344-346, 398-401; 30 (1921), S. 44-48]. *Nuovi contributi geometrici alla teoria delle forme binarie* [Rendic. Ist. Lombardo 54 (1921)].

<sup>2)</sup> Si tratta in sostanza d'una generalizzazione del *principio di trasporto* di Hesse [Ein Übertragungsprinzip, Journ. für Math. 66 (1867), S. 15-21], alla quale Klein accenna nel suo *Programma* [Ann. di Mat. 17 (1889-90), S. 307-343, § 5] e Lie dedica alcune pagine d'un suo trattato [Lie-Scheffers: *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen*, Leipzig, Teubner 1893, Kap. 23]. Casi particolari eleganti si trovano in Klein, *Elementarmathematik*, ecc. [Leipzig, Teubner 1911], vol. 1°, Parte 2ª, 1, 3, e Brusotti: *Sulla curva razionale normale* ecc. [Ann. di Mat. (3) 9 (1904), S. 311-352]; ma in quest'argomento il lavoro più notevole e più vicino al nostro punto di vista, è l'importante memoria di Fano, *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sé* [Memorie Acc. Torino (2) 46 (1896), S. 187-218] che, nel seguito, richiameremo più volte, citando il solo nome dell'Autore.

di chiarezza, ho dedicato qualcosa più di un semplice richiamo. Confido ch'egli vorrà considerare in proposito con benevola indulgenza le involontarie omissioni.

## § 1.

## Forme binarie e loro immagini geometriche.

1. Nel seguito indicheremo sempre con  $f(x_1 x_2)$ , o con  $f_n$  o con  $a_x^n$  una forma binaria d'ordine  $n$  nelle variabili  $x_1 x_2$ , con  $\bar{f}(x)$  il corrispondente polinomio nella variabile non omogenea  $x = \frac{x_1}{x_2}$  e porremo

$$(1) \quad \bar{f}(x_1 x_2) \equiv a_x^n \equiv x_2^n \bar{f}(x) \equiv \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i x_1^{n-i} x_2^i.$$

Nella considerazione della forma  $f$  prescindiamo da un eventuale fattore di proporzionalità, riguardando  $f$  come data quando lo sono i rapporti dei suoi coefficienti  $a_i$  ad uno fra essi, cioè quando son date le radici dell'equazione  $\bar{f}(x) = 0$ , o in altre parole il gruppo  $G_n$  di  $n$  punti rappresentato dalla predetta equazione sopra una retta  $r$  ove  $x$  s'interpreti come coordinata non omogenea. Quel  $G_n$  dà insomma notoriamente un'immagine geometrica della forma  $f$ .

Un'altra immagine geometrica che costituisce la base della presente trattazione, si ha assumendo  $a_0, a_1, \dots, a_n$  quali coordinate omogenee di punto in uno spazio  $S_n$ : allora alla forma  $f$  rimane associato un punto  $F$  di quello spazio che si considererà come *immagine* della forma stessa o del  $G_n$  relativo<sup>3)</sup>.

Supponiamo in particolare che  $G_n$  sia costituito da  $n$  punti coincidenti in  $x = \lambda$  ( $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2$ ), cioè che  $f$  sia la  $n$ -esima potenza della forma lineare  $x_1 - \lambda x_2$ ; allora le coordinate del punto  $F$  saranno date dalla formole

$$(2) \quad \rho a_i = (-1)^i \lambda^i, \quad \sigma a_i = (-1)^i \lambda_1^i \lambda_2^{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

le quali esprimono che  $F$  appartiene alla  $C^n$  *razionale normale* da esse rappresentata al variare dei parametri.

2. I punti di  $C^n$  son posti, per il tramite del parametro  $\lambda$ , in corrispondenza biunivoca con quelli di  $r$ , e ad essa ci riferiremo correntemente nel discorso quando parleremo indifferentemente dei punti di  $r$  o della  $C^n$ . Un punto  $P$  di questa curva è individuato dal parametro  $\lambda$  (dai

<sup>3)</sup> In talune questioni aritmetiche dove non è opportuno prescindere dal fattore di proporzionalità, giova assumere le  $a_i$  come coordinate *non omogenee* di punto in un  $S_{n+1}$ . Cfr. Pincherle, *Una interpretazione geometrica ed una estensione della divisibilità dei polinomi* [Periodico di Mat. (4) 1, n° 4, S. 276-282].

parametri omogenei  $\lambda_1, \lambda_2$  o, il che è lo stesso, dalla coordinata  $x$  (ovvero  $x_1, x_2$ ).

Consideriamo ora tutti i  $G_n$  che contengono un dato punto  $P$  ( $x = \lambda$ ) e proponiamoci di determinare la  $V_{n-1}$  riempita dalle loro immagini. La condizione imposta ad  $\bar{f}(x)$  è d'esser divisibile per  $x - \lambda$ , cioè è  $\bar{f}(\lambda) = 0$ , e questa è un'equazione *lineare* nelle  $a_i$ , cioè rappresenta un iperpiano di coordinate  $u_i$  espresse da

$$(3) \quad \varrho u_i = \binom{n}{i} \lambda^{n-i}, \quad \sigma u_i = \binom{n}{i} \lambda_1^{n-i} \lambda_2^i,$$

ch'è poi l'*iperpiano osculatore* a  $C^n$  nel punto  $P$ .

Se quindi  $F$  è il punto immagine d'un  $G_n$  costituito dai punti  $P_1, P_2, \dots, P_n$  di  $C^n$ , l'iperpiano osculatore in ciascuno di quei punti dovrà passare per  $F$  che dunque resta determinato come intersezione di quegli  $n$  iperpiani. Abbiamo così una costruzione geometrica semplice del punto  $F$ , una volta assegnato su  $C^n$  il  $G_n$  relativo.

Sia ora  $I$  un iperpiano di coordinate  $u_i$ . Volendo determinare le sue intersezioni con  $C^n$ , basterà nella sua equazione porre, al posto delle coordinate  $a_i$ , i secondi membri della prima delle (2), e risolvere la equazione ottenuta

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i u_i \lambda^i = 0,$$

rispetto al parametro  $\lambda$ . Se pertanto noi supponiamo che il  $G_n$  segato da  $I$  su  $C^n$  sia quello corrispondente alla forma (1), quell'equazione dovrà coincidere con  $\bar{f}(\lambda) = 0$  e ciò porge le relazioni

$$(4) \quad \varrho u_i = (-1)^i \binom{n}{i} a_{n-i}, \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

fra le coordinate del punto  $F$  immagine d'un  $G_n$  e quelle dell'iperpiano  $I$  individuato dai punti del  $G_n$ .

Le (4) rappresentano la nota reciprocità involutoria (polarità se  $n$  è pari, sistema nullo se  $n$  è dispari) che muta in sé la  $C^n$  trasformandone ogni punto nel relativo iperpiano osculatore<sup>4</sup>): noi la indicheremo con  $R$  denominandola in ogni caso *polarità fondamentale*. L'osservazione predetta può allora enunciarsi dicendo che il punto  $F$  immagine d'un  $G_n$  e l'iperpiano  $I$  individuato dai punti del  $G_n$  si corrispondono nella polarità fondamentale.

3. È ovvio, in virtù di elementari considerazioni di limite, che se  $h$  punti del  $G_n$ , ad esempio  $P_1, P_2, \dots, P_h$  coincidono in  $P$ , l'iperpiano  $I$

<sup>4</sup>) Cfr. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [Pisa, Spoerri, 1907], Cap. 12°, N. 8.



resta individuato da  $P_{h+1}, \dots, P_n$  e dallo  $S_{h-1}$  osculatore in  $P$  (spazio congiungente gli  $h$  punti infinitamente vicini  $P_1, P_2, \dots, P_h$ ), ed il punto  $P$  risulta dall'intersezione degli iperpiani osculatori in  $P_{h+1}, \dots, P_n$  collo  $S_{n-h}$  osculatore in  $P$  (intersezione di  $h$  iperpiani osculatori infinitamente vicini).

I punti di quello  $S_{n-h}$  corrispondono pertanto a tutti i  $G_n$  che contengono il punto  $P$  contato  $h$  volte; facendo variare  $P$ , lo  $S_{n-h}$  descrive una delle *sviluppari osculatrici* a  $C^n$  che indicheremo con  $\Sigma_{n-h}$ . I suoi punti sono le immagini di tutti i  $G_n$  dotati d'un punto  $h$ -plo. Una sviluppabile  $\Sigma_k$  considerata come luogo di punti ha la dimensione  $k+1$  e l'ordine  $(k+1)(n-k)$  (numero degli  $S_{k-1}$  stazionari della proiezione generica di  $C^n$  in un  $S_k$ ): per  $k=n-1$  questo numero diviene eguale ad  $n$  ed esprime l'indice della  $\Sigma_{n-1}$  cioè la classe di  $C^n$ .

È particolarmente notevole il caso  $k=n-2$ . Allora  $\Sigma_{n-2}$  è un'ipersuperficie di ordine  $2(n-1)$  i cui punti sono le immagini di tutti i  $G_n$  dotati di un punto doppio (almeno): e quindi il primo membro della sua equazione nelle coordinate  $a_i$  altro non è che il *discriminante* della forma  $f$  (coll'indeterminazione d'un fattore numerico). Per questa ragione la  $\Sigma_{n-2}$  si denominerà *ipersuperficie* o *forma discriminante* e s'indicherà con  $D_n$ : il primo membro della sua equazione verrà talvolta denotato con  $d_n$ .

Da quanto precede si trae inoltre che le immagini dei gruppi  $G_n$  dotati di un punto  $t_1$ -plo, un punto  $t_2$ -plo, ..., un punto  $t_s$ -plo ( $t_1+t_2+\dots+t_s \leq n$ ) cadono nella varietà intersezione delle sviluppari osculatrici d'indici  $t_1, t_2, \dots, t_s$ . Vedremo più avanti quale ne sia l'ordine.

È infine ben chiaro che i gruppi  $G_n$  corrispondenti ai punti d'uno spazio lineare  $S_k$  di  $S_n$  appartengono ad una serie lineare  $g_n^k$  e viceversa. Ci serviremo di questa osservazione per trattare, a titolo d'esempio, il problema di caratterizzare sulla retta  $r$  i gruppi  $G_n$  che corrispondono ai punti della varietà  $W$  riempita dalle corde di  $C^n$ . L'ordine di  $W$  è ovviamente  $\binom{n-1}{2}$ .

Sia  $M$  un punto d'una corda  $m$  di  $C^n$  appoggiata a questa in  $P, Q$  e  $G$  il gruppo corrispondente ad  $M$  sulla  $r$ , o, il che è lo stesso su  $C^n$ . Variando  $M$  su  $m$ , il gruppo  $G$  descrive, per quanto precede, una  $g_n^1$  contenente i gruppi omologhi di  $P$  e  $Q$  che son costituiti dai punti stessi (o, se si vuole, dai loro corrispondenti su  $r$ ) contati ciascuno  $n$  volte.

Mediante una trasformazione di coordinate, portiamo in  $P, Q$  i punti  $x=0, x=\infty$  di guisa che le forme binarie corrispondenti siano  $x_1^n, x_2^n$ ; sarà allora  $x_1^n - \mu x_2^n = 0$ , cioè  $x^n = \mu$ , l'equazione rappresentante  $G$ . Ne segue che  $G$  è mutato in sé dalla proiettività, ciclica d'ordine  $n$ ,  $x' = \varepsilon x$  ( $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ); e viceversa ogni gruppo che costituisca un ciclo per una siffatta proiettività, può com'è ben noto, ricondursi, con opportuna

scelta delle coordinate, al tipo predetto. Sicchè la varietà  $W$  delle corde di  $C^n$  è l'immagine dei gruppi  $G_n$  ciclici, cioè delle forme che mediante una sostituzione lineare posson ricondursi al tipo binomio  $a_0 x_1^n + a_n x_2^n$ .

Il ragionamento precedente cade in difetto se  $P$  e  $Q$  coincidono, cioè se  $m$  è una tangente di  $C^n$ : nel qual caso  $G_n$  è un gruppo dotato di un punto  $n-1$ -plo. Ma poichè  $W$  contiene la sviluppabile  $\Sigma_1$  delle tangenti a  $C^n$ , così i gruppi dotati d'un punto  $n-1$ -plo appaiono come particolari gruppi ciclici *degeneri*.

Se  $n=4$  i gruppi ciclici coincidono notoriamente (salvo l'ordine che qui è inessenziale) coi gruppi *armonici*: sicchè l'equazione di  $W$  (che in questo caso è un'ipersuperficie) nelle  $a_i$  esprime la condizione perchè una forma biquadratica rappresenti un gruppo armonico. Il primo membro di quell'equazione è dunque il noto *invariante cubico*  $j$  delle forme biquadratiche<sup>5)</sup>.

4. Accenniamo brevemente a talune estensioni della rappresentazione considerata.

Se  $f$  e  $\varphi$  son due forme binarie, d'ordini  $n, m$  coi coefficienti  $a_i$  e  $b_i$ , come immagine del sistema costituito dalle due forme, può assumersi la coppia costituita dai punti che in due spazi  $S_n, S_m$  rappresentano, alla maniera precedente, le forme stesse, ovvero l'elemento corrispondente a quella coppia entro la varietà  $M_{n+m}$  ad  $n+m$  dimensioni che rappresenta le coppie di punti di quei due spazi.

La  $M_{n+m}$  è razionale, ma la sua rappresentazione su di un  $S_{n+m}$  non può farsi senza eccezioni: insomma le coppie di punti dei due spazi predetti non possono esser riferite biunivocamente, senza eccezioni, ai punti di un  $S_{n+m}$ .<sup>6)</sup>

Non sarebbe pertanto conveniente assumere come immagine del sistema  $f, \varphi$  il punto di coordinate non omogenee  $\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}, \frac{b_1}{b_0}, \dots, \frac{b_m}{b_0}$  in un  $S_{n+m}$ , giacchè nascerebbero delle eccezioni in corrispondenza ai punti impropri.

Torna invece opportuno per lo studio geometrico delle forme invarianti legate al sistema  $f, \varphi$  assumere le  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  come coordinate *omogenee* in un  $S_{n+m+1}$ .<sup>7)</sup> Allora la coppia  $f, \varphi$  ha come immagine la *retta* congiungente i due punti  $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots, 0)$

<sup>5)</sup> Cfr. Fano, n° 22, Brusotti, loco cit. n° 3.

<sup>6)</sup> Nella Memoria *Sul modello minimo della varietà delle  $m$ -ple non ordinate*, ecc. [Ann. di Mat. (3) 27 (1917), S. 1-40], Bordiga ha dimostrato che il modello minimo per la  $M_{n+m}$  (cioè la varietà di minimo ordine che rappresenta le coppie predette senza eccezioni) è dato, almeno per il caso di spazi della stessa dimensione, dalla nota varietà di Segre.

<sup>7)</sup> Cfr. Fano, § 3.

$(0, 0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots, b_m)$  che in due spazi  $S_n, S_m$  subordinati entro  $S_{n+m+1}$  rappresentano separatamente  $f, \varphi$ .

La convenienza di una rappresentazione siffatta più intravedersi attraverso il semplice esempio che andiamo a svolgere. Le due curve razionali normali  $C^n, C^m$  collegate alle rappresentazioni di  $f, \varphi$  in  $S_n, S_m$  restano vincolate da una corrispondenza proiettiva  $T$  quando si considerano come omologhi due loro punti che corrispondono allo stesso punto di  $r$ , cioè allo stesso valore di  $x$ . Se le  $\bar{f}=0, \bar{\varphi}=0$  hanno una radice comune, cioè determinano su  $r$  due gruppi  $G_n, G_m$  contenenti uno stesso punto  $P$ , le loro immagini in  $S_n, S_m$  cioè i punti d'appoggio della retta immagine della coppia  $f, \varphi$  stanno ( $n^\circ 2$ ) in due spazi  $S_{n-1}, S_{m-1}$  osculatori rispettivamente a  $C^n, C^m$  in due punti corrispondenti (in  $T$ ) omologhi di  $P$ . Fisso rimanendo  $P$ , ogni punto dello  $S_{n+m-1}$  congiungente quei due spazi è immagine (cioè ha per coordinate i coefficienti) di una coppia  $f, \varphi$  con una radice comune fissa (in  $P$ ): ma se si fa variare  $P$  su  $r$ , le  $\infty^1$  posizioni di quello  $S_{n+m-1}$  riempiono una ipersuperficie la cui equazione nelle  $a_i, b_i$  dà la condizione perchè  $f$  e  $\varphi$  abbiano una radice in comune. Il primo membro di essa è dunque (prescindendo da un fattore numerico) il *risultante* di  $f$  e  $\varphi$ , e l'ipersuperficie considerata ne fornisce una interpretazione geometrica.

Analoghe considerazioni valgono per i sistemi di più forme binarie, e così pure per le forme in più variabili. Per esempio le forme ternarie d'ordine  $n$  posson rappresentarsi coi punti d'uno spazio ad  $\frac{n(n+3)}{2}$  dimensioni: in questa rappresentazione le potenze  $n$ -esime di forme lineari (rette  $n$ -ple) hanno per immagini i punti della nota superficie d'ordine  $n^2$ , estensione di quella del Veronese, ecc.

## § 2.

### Gruppi proiettivi della $C^n$ razionale normale.

5. Una  $C^n$  razionale normale è mutata in sè da un gruppo di  $\infty^3$  omografie dello spazio ambiente, che noi indicheremo con  $\Gamma$  e denomineremo *gruppo totale* della  $C^n$ . E' questa una proprietà ben nota<sup>\*)</sup>, della quale tuttavia per i nostri scopi conviene che analizziamo con una certa minuzia i particolari.

Una proiettività  $\pi$  della retta  $r$  muta un  $G_n$  in un  $G_n$ , in particolare un  $G_n$  costituito da  $n$  punti coincidenti in un  $G_n$  analogo, ed una serie lineare in una serie lineare; e pertanto, nello spazio  $S_n$  in cui si rappresentano quei  $G_n$  alla maniera del paragrafo precedente, vi corrisponde

<sup>\*)</sup> Cfr. Bertini, *Introduzione*, Cap. 12°, n° 19.

una proiettività  $\Pi$  che muta in sè la  $C^n$ . Viceversa è chiaro, in base alle osservazioni del n° 2, che ogni proiettività  $\Pi$  di  $\Gamma$  può pensarsi collegata nel modo predetto ad una proiettività  $\pi$  di  $r$ .

Ciò indica subito la via da seguire per dedurre le equazioni di  $\Pi$  da quelle di  $\pi$ . Se quest' ultime sono

$$(5) \quad \begin{aligned} \varrho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \varrho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2, \end{aligned}$$

si parta da una forma binaria  $f(x_1, x_2)$  d'ordine  $n$  e se ne costituisca la *trasformata*

$$f_1(x_1, x_2) \equiv f(c_{11}x_1 + c_{12}x_2, c_{21}x_1 + c_{22}x_2),$$

mediante la *sostituzione lineare* (5). Ciò equivale, si badi bene, ad applicare al gruppo  $G_n$  rappresentato da  $f=0$  non l'operazione  $\pi$  ma la  $\pi^{-1}$ : per modo che se noi indichiamo con  $\gamma_i(a)$  i coefficienti di  $f_1$  considerati come forme lineari nelle  $a_i$  (coefficienti di  $f$ ) la sostituzione lineare

$$(6) \quad \varrho a'_i = \gamma_i(a) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

rappresenta  $\Pi^{-1}$ . La sostituzione inversa, che rappresenta  $\Pi$  si ottiene adunque nello stesso modo partendo dall'inversa della (5): ma a noi interessano di più le espressioni (6) giacchè se si vuol trasformare mediante  $\Pi$  un'ipersuperficie  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$  di  $S_n$  le forme lineari da sostituirsi alle  $a_i$  nella  $\varphi$  sono appunto le  $\gamma_i$ .

Qui cade in acconcio ricordare al lettore, che se l'ipersuperficie predetta è mutata in sè da tutte le operazioni di  $\Gamma$ , la forma  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  è un *invariante* di  $f$ , cioè che l'invarianza della forma  $\varphi$  consegue dall'invarianza dell'equazione  $\varphi = 0$ ; o in altre parole che se l'ipersuperficie  $\varphi = 0$  è trasformata in sè da  $\Gamma$ , il fattore per cui risulta moltiplicata  $\varphi$  quando si opera su di essa con una proiettività di  $\Gamma$  è sempre una potenza del modulo di (5)<sup>9</sup>. Ciò in virtù di un noto teorema il quale è valido anche se invece di  $\Gamma$  si tratta di un suo sottogruppo la cui trasformazione generica non sia degenera<sup>10</sup>. Per il calcolo delle  $\gamma_i$  è comodo nella pratica valersi su  $r$  della coordinata non omogenea  $x$ . Si ha allora, colle solite notazioni

$$(7) \quad \tilde{f}_1(x) \equiv (c_{21}x + c_{22})^n \tilde{f}\left(\frac{c_{11}x + c_{12}}{c_{21}x + c_{22}}\right),$$

<sup>9</sup> Occorrerà naturalmente fissare il  $\varrho$ . Nel seguito, quando ciò non possa dar luogo ad inconvenienti porremo addirittura  $\varrho = 1$ .

<sup>10</sup> Si veda ad es. la dimostrazione di questo teorema (dovuto ad Aronhold) esposta nel trattato di Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni* [Bologna, Zanichelli] Vol. 1°, Cap. 1°, n° 2.

cioè la  $\bar{f}_1(x)$  si ottiene applicando ad  $\bar{f}(x)$  la sostituzione lineare fratta corrispondente alla (5) e *riducendo a forma intera* nella  $x$ . I coefficienti di  $\bar{f}_1$ , liberati naturalmente dai fattori binomiali, sono appunto le  $\gamma_i$ .

6. Facciamo un esempio, che avremo occasione di applicare ad uno scopo importante nel prossimo lavoro, procurandoci le espressioni effettive delle  $\gamma_i$  nel caso della proiettività

$$(8) \quad \begin{aligned} x'_1 &= \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, \\ x'_2 &= \xi_3 x_1 \end{aligned} \quad \left( x' = \xi + \frac{1}{x} \right),$$

che muta il punto improprio di  $r$  nel punto  $x = \xi$ . Avremo subito dalla formula di Taylor

$$\bar{f}\left(\xi + \frac{1}{x}\right) = \bar{f}(\xi) + \frac{1}{x} \bar{f}'(\xi) + \frac{1}{x^2} \frac{\bar{f}''(\xi)}{2!} + \dots + \frac{1}{x^n} \frac{\bar{f}^{(n)}(\xi)}{n!},$$

da cui riducendo a forma intera

$$\bar{f}_1(x) = x^n \bar{f}(\xi) + x^{n-1} \bar{f}'(\xi) + x^{n-2} \frac{\bar{f}''(\xi)}{2!} + \dots + \frac{\bar{f}^{(n)}(\xi)}{n!},$$

e pertanto, tenendo opportunamente conto dei fattori binomiali

$$(9) \quad \gamma_i(a) = \frac{(n-i)!}{n!} \bar{f}^{(i)}(\xi).^{11)}$$

Si può anche scrivere più semplicemente, valendosi delle notazioni simboliche

$$(10) \quad \gamma_i(a) = a_i^{n-i},$$

giacchè, derivando  $i$  volte rispetto a  $\xi$  l'identità  $\bar{f}(\xi) \equiv a_\xi^n$  viene

$$a_i^{n-i} \equiv \frac{(n-i)!}{n!} \bar{f}^{(i)}(\xi).$$

Osserviamo ancora che come la (8) muta il punto improprio di  $r$  nel punto  $x = \xi$ , così la  $II$  corrispondente in  $S_n$  trasformerà il punto  $U$  di  $C^n$  di parametro  $x = \infty$  nel punto  $P$  di parametro  $x = \xi$ . Nel seguito avremo bisogno di scegliere su  $C^n$  un punto particolare da fissarsi una volta per sempre; per ragioni di opportunità che risulteranno dalla trattazione sceglieremo il punto  $U$  che si denominerà *punto fondamentale della  $C^n$* . Il punto di parametro  $x = 0$  (*punto origine*) verrà indicato con  $O$ .

<sup>11)</sup> Volendo si potrebbe, nei secondi membri, prescindere dal fattore comune  $\frac{1}{n!}$ .

Cogliamo l'occasione per avvertire il lettore che nei primi membri delle equazioni di ipersuperficie di  $S_n$  prescindiamo in generale da fattori numerici: a meno che non siano tradizionalmente fissati o non ci convenga di fissarli come faremo per taluni invarianti. Avvertiamo ancora che con  $a_\xi^n$  denoteremo sia la  $\bar{f}(x_1 x_2)$  come la  $\bar{f}(x)$ , più spesso quest'ultima: le formule lo spiegheranno in ogni caso chiaramente.

7. Prendiamo ora in esame alcuni *sottogruppi* del gruppo totale  $\Gamma$ . Anzitutto i sottogruppi  $\infty^2$ : sono quelli che lasciano fisso un punto  $P$  di  $C^n$ , e noi li indicheremo con  $\Gamma_P$ , fatta eccezione per  $\Gamma_U$  che verrà correntemente indicato con  $\Omega$ . Questo sottogruppo, che ha importanza essenziale per la nostra trattazione si denominerà *sottogruppo fondamentale*; esso corrisponde al *gruppo delle similitudini* di  $r$  cioè delle sostituzioni lineari *intere* sulla coordinata non omogenea  $x$ . Le forme  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  invarianti per  $\Omega$  si chiameranno *seminvarianti* della forma originaria  $f$  e la denominazione verrà estesa alle ipersuperficie corrispondenti.

Dei sottogruppi  $\infty^1$  hanno per noi importanza solo quelli contenuti in  $\Omega$ . Anzitutto ci sono i gruppi  $\Omega_P$  costituiti dalle trasformazioni di  $\Omega$  che lasciano fisso un altro punto  $P$  di  $C^n$ . Noto tra essi il gruppo  $\Omega_O$ ; le sue trasformazioni corrispondono alle proiettività  $x' = \mu x$  di  $r$  che hanno uniti i due punti  $0, \infty$ , e perciò (come si ricava subito col procedimento del n° 5) hanno le equazioni

$$(11) \quad a'_i = \lambda^i a_i \quad \left( \lambda = \frac{1}{\mu}; i = 0, 1, \dots, n \right).$$

Poichè l'invarianza per trasformazioni del tipo (11) è caratteristica delle funzioni *isobariche*<sup>12)</sup> così il gruppo  $\Omega_O$  si chiamerà *gruppo isobarico*. Un altro sottogruppo notevolissimo è quello delle proiettività di  $\Omega$  che non hanno, su  $C^n$ , punti uniti diversi da  $U$ , cioè corrispondono alle proiettività *paraboliche* di  $r$  col punto improprio unito (*traslazioni*). Questo sottogruppo che è ovviamente *invariante* entro  $\Omega$  s'indicherà con  $[\Omega]$  e lo chiameremo il *gruppo parabolico* di  $C^n$ .

Determiniamo le forme  $\gamma_i(a)$  per la trasformazione generica di  $[\Omega]$  che muta il punto  $O$  nel punto  $P$  di parametro  $x = \xi$ . Sulla retta  $r$  la  $\pi$  corrispondente è  $x' = x + \xi$ , onde, seguendo il procedimento del n° 5, avremo

$$\bar{f}_1(x) \equiv \bar{f}(x + \xi) = \bar{f}(\xi) + x \bar{f}'(\xi) + x^2 \frac{\bar{f}''(\xi)}{2!} + \dots + x^n \frac{\bar{f}^{(n)}(\xi)}{n!},$$

e quindi subito

$$(12) \quad \gamma_i(a) = \frac{i!}{n!} \bar{f}^{(n-i)}(\xi) = a_i^i.$$

8. Ogni trasformazione di  $\Omega$  appartiene ad  $[\Omega]$  ovvero ad uno dei sottogruppi  $\Omega_P$ : e poichè la trasformazione di  $[\Omega]$  che muta  $O$  in  $P$

<sup>12)</sup> Si badi che la (11) è proprio  $\Pi$ , mentre  $\Pi^{-1}$  è  $a'_i = \mu a_i$ . Pertanto la trasformata di un'ipersuperficie  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$  mediante  $\Pi$ , è  $\varphi(a_0, \mu a_1, \dots, \mu^n a_n) = 0$ , e siccome il modulo della  $x' = \mu x$  è  $\mu$ , così l'invarianza della forma  $\varphi$  si esprime coll'equazione  $\varphi(a_0, \mu a_1, \dots, \mu^n a_n) = \mu^p \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  notoriamente caratteristica (quando  $\mu$  è un' indeterminata, cioè  $\Pi$  è arbitraria in  $\Omega_O$ ) delle funzioni isobariche.

muta  $\Omega_0$  in  $\Omega_P$ , così l'intero gruppo  $\Omega$  può generarsi moltiplicando le proiettività di  $[\Omega]$  per quelle di  $\Omega_0$ .

Pertanto affinché una forma  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  sia seminvariante, basta che sia invariante per  $\Omega_0$  ed  $[\Omega]$ ; e poichè l'invarianza per  $\Omega_0$  equivale all'isobaricità di  $\varphi$ , così rimarrà da esprimere che  $\varphi$  è invariante per  $[\Omega]$  cioè per la relativa trasformazione infinitesima  $\omega$ .

Le relative  $\gamma_i$  si ricavano subito dalla (12) ponendovi  $\xi = \varepsilon$  ( $\varepsilon$  infinitesimo) e trascurando potenze di  $\varepsilon$  superiori alla prima. Viene allora

$$(13) \quad \gamma_i(a) = a_i + i\varepsilon a_{i-1},$$

onde, indicando con  $X\varphi$  il simbolo di  $\omega$ , cioè ponendo

$$\varepsilon X\varphi = \varphi(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) - \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n),$$

si ha subito, tenuto conto delle (13), e sostituendo a  $\varphi(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  il suo sviluppo di Taylor

$$(14) \quad X\varphi = \sum_{i=1}^n i a_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}.$$

Poichè d'altra parte il modulo della  $x' = x + \varepsilon$  è 1, così se  $\varphi$  è invariante per  $\omega$  sarà  $\varphi(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  cioè  $X\varphi = 0$ . Giungiamo così al noto teorema:

*Condizione perchè una forma  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  sia seminvariante, è ch'essa sia isobarica e soddisfi all'equazione differenziale*

$$(15) \quad X\varphi = 0. \text{ }^{19)}$$

9. Vediamo rapidamente come talune delle considerazioni di questo paragrafo si estendano ai sistemi di forme. Trattando per semplicità il caso di due forme, e conservando le notazioni del n° 4, osserviamo che ogni proiettività  $\pi$  di  $r$  induce una proiettività nello  $S_n(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots, 0)$ , ad esempio la  $\varrho a'_i = \gamma_i(a)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) ed un'altra nello  $S_m(0, 0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots, b_m)$  che potremo supporre avente per equazioni  $\varrho b'_j = \delta_j(b)$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ );

<sup>19)</sup> Il procedimento seguito non differisce in sostanza da taluni metodi classici, ma ci sembra ch'esso scaturisca più naturalmente dalle nostre considerazioni geometriche, evitando ogni apparenza artificiosa. Avremmo potuto dispensarcene ma intendiamo sviluppare la trattazione indipendentemente da ogni altra, salvo per le più elementari convenzioni del calcolo simbolico, e per il teorema di cui alla nota <sup>18)</sup>, la cui dimostrazione è, del resto, elementare.

Si trova analogamente che il simbolo  $Y\varphi$  della trasformazione infinitesima del gruppo isobarico è  $\sum_{i=1}^n i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}$  e che la condizione d'isobaricità di  $\varphi$  può esprimersi coll'equazione differenziale  $Y\varphi = p\varphi$ . Questa, com'è ben noto, può anche stabilirsi imitando la dimostrazione del teorema di Eulero per le funzioni omogenee.



mediante queste due proiettività può costruirsi, nello  $S_{n+m+1}$  congiungente una *schiera*  $\infty^1$  di proiettività

$$(16) \quad \varrho a'_i = \gamma_i(a), \quad \varrho b'_j = \lambda \delta_j(b) \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$$

( $\lambda$  parametro) che operano tutte allo stesso modo sulle rette incidenti ai due spazi, immagini delle coppie  $f, \varphi$ .

Sicchè al gruppo  $\infty^3, \gamma$  delle proiettività di  $r$  corrisponde un gruppo *non più*  $\infty^3$  *ma*  $\infty^4$  (e se le forme fossero  $t, \infty^{t+2}$ ): ma però noi possiamo fissare in esso un sottogruppo invariante  $\infty^3$  in isomorfismo oleodrico con  $\gamma$ . Basta nelle (5) del n° 5 fissare il  $\varrho$  in modo da rendere unimodulare quella sostituzione, e poi porre nelle (16)  $\lambda = 1$ .<sup>14)</sup> Valgono allora per quel gruppo, che possiamo indicare con  $\Gamma$ , e per i suoi sottogruppi, proprietà analoghe a quelle dei  $n^1$  precedenti, coll'avvertenza di sostituire ai punti  $P$  della  $C^n$  le coppie  $P, P'$  costituite da due punti di  $C^n$ ,  $C^m$  associati, cioè corrispondenti in  $T$ . Così il sottogruppo  $\infty^3 \Omega$  è costituito dalle proiettività di  $\Gamma$  che lascian fissa la coppia  $U, U'$  (e quindi tutti i punti della retta  $UU'$ ). Con riferimento a quel sottogruppo si possono definire anche qui i *seminvarianti*; risulta subito ch'essi son funzioni isobariche delle  $a_i, b_j$  soddisfacenti ad un'equazione analoga alla  $X\varphi = 0$ , ecc.

### § 3.

#### Invarianza rispetto al gruppo totale.

10. Esaminiamo ora i tipi più semplici di enti geometrici (varietà e loro sistemi, corrispondenze, ecc.) invarianti per il gruppo  $\Gamma$ .

Lo studio esauriente della questione condurrebbe a sviluppare l'intera teoria degl'invarianti (propriamente detti) e forse qualcosa di più: ma noi qui ci limiteremo, come abbiám detto, alle cose più semplici.

Intanto, poichè sulla  $r$  non esistono serie lineari incomplete  $g_n^k$  invarianti così *non ci sono spazi lineari invarianti*.

Vediamo ora le proiettività. Anzitutto non ci sono omografie invarianti (diverse dall'identità) giacchè esse formerebbero entro  $\Gamma$  un sottogruppo invariante, mentre  $\Gamma$ , come il corrispondente gruppo  $\gamma$  di  $r$  è *semplice* cioè non contiene sottogruppi invarianti.

Esiste invece una reciprocità invariante, ed è la polarità fondamentale  $R$ . Sarà dunque tale per  $n$  pari anche la quadrica  $Q_n$  relativa (quadrica di Clifford) e pertanto il 1° membro della sua equazione è un invariante

<sup>14)</sup> Cfr. Fano, n° 11.



(*invariante quadratico*) che denoteremo con  $q_n$ . Per averne l'espressione, basta scrivere l'equazione di  $R$  sotto la forma

$$(17) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i b_{n-i} = 0,$$

che discende immediatamente dalle (4) del n° 2 (denotandosi con  $a_i, b_i$  le coordinate di due punti coniugati) e porre  $a_i = b_i$ : viene allora com'è noto

$$(18) \quad q_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a_i a_{n-i},$$

restando fissato in  $q_n$  anche il fattore numerico.

Dalle (17) (18) si passa subito alle notissime espressioni simboliche, ponendo  $a_i = a_1^i a_2^{n-i}$ ,  $b_i = b_1^i b_2^{n-i}$ : ed inverso allora il 1° membro della (17) diviene

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^n = (ab)^n,$$

sicchè se i simboli  $a, b$  s'intendono riferiti a due *diversi* sistemi di coefficienti (punti di  $S_n$ ) l'equazione  $(ab)^n = 0$  rappresenta  $R$  (e ciò è vero anche per  $n$  dispari) mentre se quei simboli si riferiscono allo *stesso* sistema di coefficienti il simbolo  $(ab)^n$  esprime  $q_n$ .

Una espressione elegante di  $q_n$  mediante le radici della forma si stabilisce facilmente per via geometrica ricorrendo alle proprietà rilevate al § 1. Dicasi  $F$  un punto della quadrica, immagine della forma  $f$ ,  $I$  il suo iperpiano polare,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  i punti d'incontro di esso con  $C^n$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  i relativi parametri, cioè ( $n^\circ 2$ ) le radici dell'equazione  $\tilde{f}(x) = 0$ .

Ai punti di  $I$  corrispondono su  $C^n$  (o su  $r$ ) i gruppi d'una serie lineare  $g_{n-1}^{n-1}$  (quella segata dagli iperpiani per  $F$ ) che contiene i punti  $x = \lambda_i$  contati ciascuno  $n$  volte, e quindi, indicandosi con  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  opportuni parametri, può rappresentarsi coll'equazione

$$(19) \quad \mu_1 (x - \lambda_1)^n + \mu_2 (x - \lambda_2)^n + \dots + \mu_n (x - \lambda_n)^n = 0.$$

Ma anche il punto  $F$  appartiene ad  $I$ , e quindi di quella serie fa parte il gruppo  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ : ciò viene a dire che la (19) dev'esser soddisfatta per convenienti valori non tutti nulli delle  $\mu$  da  $x = \lambda_1, x = \lambda_2, \dots, x = \lambda_n$ . Sarà adunque nullo il determinante simmetrico ( $n$  pari)

$$(20) \quad \begin{vmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)^n & \dots & (\lambda_1 - \lambda_n)^n \\ (\lambda_2 - \lambda_1)^n & 0 & \dots & (\lambda_2 - \lambda_n)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_n - \lambda_1)^n & (\lambda_n - \lambda_2)^n & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

il quale, come funzione simmetrica intera delle  $\lambda$ , può esprimersi in funzione intera (omogenea) delle  $a_i$ . Questa funzione si annulla nei punti di  $q_n = 0$  e solo in quelli, e siccome quella quadrica è irriducibile, così essa dovrà coincidere con  $q_n$  o con una sua potenza. Dopo ciò basta osservare che il determinante (20) è di grado  $n^2$  nelle  $\lambda$ , mentre, come risulta subito dalle (18),  $q_n$  è di grado  $n$ , per concluderne che quel determinante è eguale a  $q_n^n$ .

11. Veniamo a considerare i casi più semplici di varietà invarianti. Intanto l'unica curva invariante è la  $C^n$  giacchè i punti d'una curva siffatta, dovendo rimaner fissi per  $\infty^2$  operazioni di  $\Gamma$ , non possono corrispondere a  $G_n$  dotati di punti distinti<sup>15)</sup>.

Il caso delle superficie invarianti si esaurisce subito con un ragionamento analogo. I punti d'una superficie siffatta dovendo risultare uniti per (almeno)  $\infty^1$  operazioni di  $\Gamma$  corrispondono a gruppi  $G_n$  (mutati in sé da  $\infty^1$  proiettività e quindi) contenenti al più due punti distinti. Ne consegue subito che le superficie invarianti (irriducibili) son quelle che corrispondono ai gruppi dotati di un punto  $t$ -plo e d'un altro punto  $n-t$ -plo, cioè le intersezioni di due varietà osculatrici  $\Sigma_t, \Sigma_{n-t}$  ( $t = 1, \dots, n-1$ ), in particolare la  $\Sigma_1$ .<sup>16)</sup>

Per  $n=3$  questa  $\Sigma_1$  (che coincide con  $D_3$ ) è dunque l'unica superficie invariante: cioè l'unico invariante delle forme cubiche è il discriminante. Lo stesso per le forme quadratiche; ma in quel caso il discriminante è il 1° membro dell'equazione di  $C^2$  (cioè  $q_2$ ) vale a dire  $a_0 a_3 - a_1^2$ .

Più importante è il caso delle varietà invarianti a tre dimensioni. Per esaminarlo, per quanto brevemente, facciamo appello ad una nozione importante della teoria dei gruppi.

Diremo che due punti  $P, Q$  di  $S_n$  sono equivalenti rispetto a  $\Gamma$  se esiste una trasformazione  $\tau$  non degenera di  $\Gamma$  che muta  $P$  in  $Q$ , od anche, se  $\tau$  è degenera, quando  $Q$  è punto limite d'un insieme di punti equivalenti, nel senso predetto, a  $P$ .

In quest'ultima condizione si trovano p. es. i punti di  $C^n$  in relazione a qualunque punto  $P$  di  $S_n$ , giacchè un  $G_n$  qualunque di  $\Gamma$  si può mutare in un punto  $n$ -plo con una proiettività degenera limite d'una successione di proiettività non degeneri. Sorvoliamo sui dettagli.

L'insieme dei punti di  $S_n$  equivalenti ad un punto generico  $P$  (basta escludere i punti delle superficie invarianti) è una  $V_3$  invariante che noi — estendendo una denominazione più usata per le curve — chiameremo

<sup>15)</sup> Cfr. Fano, n° 15, nota 4.

<sup>16)</sup> Ibidem, n° 15.

*traiettoria* del gruppo  $\Gamma$ . Risulta dall'osservazione precedente che tutte le traiettorie contengono la  $C^n$ ; esse sono varietà algebriche (perchè lo è il gruppo  $\Gamma$ ) e riempiono un sistema algebrico  $W$  d'indice 1. Ogni  $V_s$  invariante (irriducibile) è una varietà *totale* o *parziale* di  $W$ ; il secondo caso può verificarsi se qualche  $V_s$  *particolare* di  $W$  si spezza in più parti (della stessa dimensione) su ciascuna delle quali il gruppo  $\Gamma$  opera transitivamente<sup>17)</sup>, non escludendosi che quelle parti coincidano, cioè che esistano  $V_s$  invarianti che appartengono totalmente a  $W$  quando si contino un conveniente numero di volte. Ne vedremo tra poco un esempio.

È ovvio infine che ogni varietà  $V_h$  invariante con  $h > 3$  contiene interamente la traiettoria passante per un suo punto generico.

12. Qual'è l'ordine delle predette  $V_s$  di  $W$  cioè della traiettoria generica<sup>18)</sup> di  $\Gamma$ ?

Il problema non interessa strettamente la nostra trattazione: ma l'occasione c'induce a trattarne brevemente.

Si tratta di determinare il numero dei punti comuni a quella  $V_s$  e ad un  $S_{n-3}$  generico, cioè, trasportando le cose sulla retta  $r$ , il numero dei gruppi di  $n$  punti *proiettivamente equivalenti* ad un  $G_n$  generico che indicheremo con  $G$ , i quali appartengono ad una  $g_n^{n-3}$  pure generica.

Possiam calcolare subito quel numero riferendoci ad una  $g_n^{n-3}$  *particolare*; salvo poi a giustificare il risultato mostrando che quella particolarità non altera il valore del numero cercato.

Scegliamo per lo scopo una  $g_n^{n-3}$  con tre punti fissi  $A, B, C$ ; cioè, in  $S_n$ , un  $S_{n-3}$  intersezione di tre iperpiani osculatori a  $C^n$  (nei punti omologhi di  $A, B, C$ ). Il problema riducesi allora alla ricerca del numero dei gruppi equivalenti a  $G$  che contengono  $A, B, C$ ; e un'analisi elementare dà subito come risultato  $6 \binom{n}{3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ .

Resta da giustificare la particolarità adottata, per il che basta far vedere, ch'essa non conduce a *coincidenze* di soluzioni che sian distinte nel caso generale, cioè a contatti dello  $S_{n-3}$  colla  $V_s$ . E ciò si esclude subito osservando che non possono esistere due  $G_n$  equivalenti ed infinitamente vicini i quali contengano  $A, B, C$ ; giacchè la terna  $A, B, C$  non è mutata in sé da nessuna proiettività infinitesima.

Per  $n = 4, 3$  il numero predetto va rispettivamente diviso per quello delle proiettività che mutano in sé un  $G_4$  o risp. un  $G_3$  generico cioè per 4, 6; e si ottengono così i noti valori 6, 1.

Fra le  $V_s$  invarianti la cui considerazione si presenta spontanea, indipendentemente dalle osservazioni del n° prec. possiamo infine menzionare:

<sup>17)</sup> Ibidem, n° 14.

<sup>18)</sup> Diciamo *generica*, giacchè se una  $V_s$  di  $W$  si spezza in più parti, ognuna di queste è, in senso proprio, una traiettoria.

a) La varietà delle corde di  $C^n$ . Come sappiamo (n° 3) essa ha l'ordine  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ; contandola  $2n$  volte (cioè quant'è il numero delle proiettività che mutano in se stesso un  $G_n$  ciclico) si ottiene una varietà totale di  $W$ .

b) Le varietà immagini dei  $G_n$  dotati di tre punti distinti di molteplicità assegnate  $t_1, t_2, t_3$  ( $t_1 + t_2 + t_3 = n$ ). Fra esse c'è la sviluppabile dei piani osculatori ( $t_1 = n - 2, t_2 = t_3 = 1$ ): le altre sono intersezioni di due o tre sviluppabili osculatrici di dimensioni convenientemente scelte. Il loro ordine sarà determinato tra breve.

13. Dedichiamo qualche parola, a titolo di applicazione, agl'invarianti delle forme biquadratiche; ed anzitutto dimostriamo per via geometrica che se  $\varphi$  e  $\psi$  sono due invarianti dello stesso grado (nei coefficienti di una forma  $f$ ) anche  $\varphi + \lambda\psi$  è un'invariante<sup>19)</sup>. Ed inverso, nell'ipotesi ammessa, il fascio d'ipersuperficie  $\varphi + \lambda\psi = 0$  è mutato in sè da  $\Gamma$ ; sicchè o  $\Gamma$  vi subordina l'identità, ed il teorema è dimostrato, oppure un gruppo, necessariamente  $\infty^1$  in quanto ha i due elementi uniti fissi  $\varphi = 0, \psi = 0$ . Vi sono adunque  $\infty^3$  operazioni di  $\Gamma$  che lascian fissa una terza hypersuperficie  $\chi = 0$  di quel fascio e quindi tutte le altre: ma ciò è assurdo perchè quelle operazioni formerebbero entro  $\Gamma$  un sottogruppo invariante, mentre  $\Gamma$  (n° 10) non ne possiede.

Conosciamo già due invarianti delle forme biquadratiche: il quadratico  $q_2$  che per conformarci alle notazioni in uso indicheremo con  $i^2$  ed il cubico  $j^3$ .<sup>20)</sup> Le loro potenze  $i^2$  ed  $j^3$  hanno lo stesso grado 6 e quindi, per qualunque  $\lambda$ , anche  $j^3 - \lambda i^2$  è invariante: ne consegue che il fascio  $j^3 - \lambda i^2 = 0$  altro non è che il sistema  $W$ .

Poichè ogni  $V_3$  (ipersuperficie) invariante irriducibile appartiene totalmente o parzialmente a  $W$ , così potremo concludere che ogni invariante delle forme biquadratiche è un prodotto di potenze di  $i, j$  e di espressioni della forma  $j^3 - \lambda i^2$ , appena avremo provato che in  $W$  non ci sono altre  $V_3$  riducibili o multiple oltre  $i^2 = 0, j^3 = 0$ .

Ora l'esistenza d'una  $V_3$  siffatta porterebbe quella di un'altra forma quadratica o cubica  $\varphi = 0$  invariante; ed allora lo sarebbe anche  $\varphi + \lambda i^2 = 0$  ovvero  $\varphi + \lambda j^3 = 0$ , onde  $W$  risulterebbe composto con quel fascio: e ciò è da escludersi attesa la differente riducibilità di  $i^2 = 0, j^3 = 0$ .

<sup>19)</sup> Comunemente questa proposizione si dimostra ricorrendo alla relazione tra grado e peso d'un invariante: alla quale per ora non vogliamo fare appello.

<sup>20)</sup> Sappiamo già (n° 3) che i punti di  $j = 0$  sono immagini delle quaterne armoniche: quelli di  $i = 0$  rappresentano invece le quaterne equianarmoniche. Questa notissima proprietà può ad es. dimostrarsi ricorrendo all'espressione (20).

Notiamo che al fascio  $W$  appartiene come varietà totale, l'ipersuperficie discriminante  $d_4 = 0$  giacchè essa è irriducibile ed ha l'ordine 6: sicchè per un conveniente valor di  $\lambda$  e a meno d'un fattore numerico, si ha  $d_4 = j^3 - \lambda i^3$ .<sup>21)</sup>

14. Diamo qualche altro esempio generale di varietà  $V_h$  invarianti definite da relazioni semplici colla  $C^n$ , delle quali si può calcolare l'ordine mediante note formule numerative. Citeremo i due tipi seguenti:

a) *Le intersezioni di due o più sviluppabili osculatrici* (anche coincidenti) cioè le  $V_h$  che rappresentano i  $G_n$  dotati di un punto  $v_1$ -plo, un punto  $v_2$ -plo, ... un punto  $v_r$ -plo ed  $n - r$  ( $r = \Sigma v_i$ ) punti semplici. Si ha  $h = n - r + t$ , e quindi  $h = n - 1$  solo se  $t = 1$ ,  $v_1 = 2$ , cioè nel caso dell'ipersuperficie discriminante  $D_n$ . L'ordine  $\mu$  di  $V_h$ , cioè il numero dei punti comuni a  $V_h$  e ad un generico  $S_{n-h}$  è dato dal numero dei gruppi predetti contenuti in una  $g^{n-h}$  generica. Supposto che delle  $v_i$  le prime  $\alpha_1$  siano eguali a  $\sigma_1$ , le successive  $\alpha_2$  a  $\sigma_2$ , ..., le ultime  $\alpha_t$  a  $\sigma_t$  (colle  $\sigma$  tutte differenti) e quindi

$$r = \sum_{i=1}^t \alpha_i \sigma_i, \quad t = \sum_{i=1}^t \alpha_i, \quad h = n - r + t,$$

si ha subito dalla formula di de Jonquières per le curve razionali<sup>22)</sup>

$$(21) \quad \mu = t! \binom{h}{t} \frac{\sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_t^{\alpha_t}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_t!}.$$

b) *Le varietà degli  $S_\rho$  che hanno con  $C^n$  dati incontri e contatti*. Il numero complessivo delle intersezioni assegnate su  $C^n$  agli  $S_\rho$  che riempiono una di tali  $V_h$  dovrà essere eguale a  $\rho + 1$ , altrimenti (cioè se quel numero fosse minore di  $\rho + 1$ ) esisterebbero spazi soddisfacenti alle condizioni poste, passanti per un punto arbitrario dello  $S_n$ .

Supposto che lo  $S_\rho$  debba avere con  $C^n$ ,  $\alpha_1$  contatti  $\sigma_1$ -punti,  $\alpha_2$  contatti  $\sigma_2$ -punti, ...,  $\alpha_t$  contatti  $\sigma_t$ -punti, e ulteriormente  $\alpha = \rho + 1 - \Sigma \alpha_i \sigma_i$  incontri semplici, e posto  $t = \Sigma \alpha_i$  avremo intanto

$$h = \rho + \alpha + t,$$

e volendosi  $h < n$ , sarà  $\alpha + t < n - \rho$ . Poichè, salvo il caso  $\rho = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $t = 1$  (svilupppabile delle tangenti) è sempre  $h \geq 3$ , così si potrà proiettare la  $C^n$  da un  $S_{n-h}$  generico sopra un  $S_{h-1}$  in una  $C^n$  razionale di questo spazio: e l'ordine  $\mu$  di  $V_h$  sarà evidentemente eguale al numero

<sup>21)</sup> Precisati opportunamente i fattori numerici, questa relazione comunemente si scrive sotto la forma 27  $d_4 = i^3 - 6j^3$ .

<sup>22)</sup> Cfr. Torelli, *Dimostrazione di una formula di de Jonquières*, ecc. [Rendic. Palermo 21 (1906)], formula (1).

degli  $S_{q-1}$  che hanno con questa  $C^n$  gli stessi incontri e contatti assegnati allo  $S_q$ . Applicando una formula di Severi<sup>23)</sup> si trova

$$(22) \quad \mu = t! \binom{\alpha+t}{t} \binom{n-q}{h-q} \frac{\sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_t^{\alpha_t}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_t!}.$$

Il caso che può maggiormente interessare la teoria degli invarianti è quello delle ipersuperficie ( $h = n - 1$ ). Poichè  $\alpha + t \leq q + 1$  così si ha necessariamente  $h = n - 1 = q + \alpha + t \leq 2q + 1$  cioè  $q \geq \frac{n-2}{2}$ . Lasciamo al lettore la cura di esaminare con maggior dettaglio i casi più semplici.

Infine avrebbe interesse la considerazione dei sistemi che sono nel loro complesso invarianti senza che lo siano le loro singole varietà: in particolare quella dei sistemi  $\infty^1$ . Ma di essi tratteremo esaurientemente nel prossimo lavoro, sviluppando la teoria dei covarianti.

#### § 4.

##### Invarianza rispetto al sottogruppo fondamentale.

15. Come abbiám fatto al paragrafo precedente per il gruppo totale, trattiamo in questo di alcuni enti geometrici che sono invarianti per le operazioni del sottogruppo fondamentale  $\Omega$ , o, come più brevemente diremo (cfr. n° 7), *seminvarianti*. Tali sono beninteso tutti gli enti invarianti, ma di questi abbiám già detto a sufficienza per i nostri scopi.

Le considerazioni di questo paragrafo sono in gran parte essenziali per la teoria geometrica dei covarianti, e ad esse ci riferiremo correntemente nel prossimo lavoro.

Incominciamo dagli enti più semplici, e anzitutto dagli *spazi lineari seminvarianti*. Tali sono evidentemente gli *spazi osculatori* a  $C^n$  nel *punto fondamentale*  $U$ , il generico dei quali, di dimensione  $h$  ( $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-h-1} = 0$ ) verrà indicato con  $\omega_h$ ; in particolare, per  $h = 0$ , lo stesso punto  $U$ , e per  $h = n - 1$  l'iperpiano  $a_0 = 0$  che chiameremo *iperpiano fondamentale* e indicheremo più concisamente con  $\omega$ . Si vede facilmente che, oltre a questi, non ci sono altri spazi lineari seminvarianti.

Le *proiezioni e sezioni* cogli spazi predetti sono evidentemente *operazioni seminvarianti* (cioè conservano la seminvarianza); in particolare dunque lo sono le proiezioni da  $U$  e le sezioni con  $\omega$ . Giova subito notare che queste due operazioni duali si scambiano una nell'altra applicandovi la polarità fondamentale  $R$ : la quale è un'operazione invariante e quindi „a fortiori“ seminvariante.

<sup>23)</sup> Severi, *I gruppi neutri con elementi multipli di un' involuzione sopra un ente razionale* [Rendic. Accad. Lincei (5) 9 (1900), S. 379-382], formula (2).

16. Mediante le predette operazioni di proiezione e sezione ed opportune trasformazioni possiam subito mettere in evidenza taluni enti seminvarianti, per dir così, tipici. Ed anzitutto le *proiezioni di  $C^n$  dagli spazi  $\omega_h$* , le quali son conì di dimensione  $h+2$  ed ordine  $n-h-1$  ( $h < n-1$ ) che noi indicheremo con  $K_h$ . Segando  $K_h$  collo  $S_{n-h-1}$  opposto ad  $\omega_h$  nella piramide fondamentale ( $a_{n-h} = a_{n-h+1} = \dots = a_n = 0$ ) otteniamo ivi una  $C^{n-h-1}$  razionale normale, proiezione di  $C^n$  le cui equazioni

$$(23) \quad g a_i = (-1)^i \lambda^i \quad (i = 0, 1, \dots, n-h-1),$$

sono perfettamente analoghe a quelle della  $C^n$ . Perciò i punti  $P'$  dello  $S_{n-h-1}$  possono intendersi collegati, alla maniera del § 1, alle forme  $a_{n-h-1}^i$  d'ordine  $n-h-1$ , cioè ai  $G_{n-h-1}$  di  $r$ . Vedremo meglio al paragrafo seguente in che relazione geometrica stia un  $G_{n-h-1}$  siffatto con un  $G_n$  associato ad un punto  $P$  di  $S_n$  di cui  $P'$  sia proiezione.

Tra i conì  $K_h$  è notevole  $K_{n-2}$  che riducesi ad un fascio d'iperpiani, e più ancora per noi  $K_{n-3}$  che ha la dimensione  $n-1$ , cioè è un'iper-superficie, e può costruirsi proiettando da  $\omega_{n-3}$  la conica  $C^2$  del piano ( $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$ ) di equazione  $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$ . Questa è anche l'equazione di  $K_{n-3}$  e nel seguito, in armonia con notazioni più generali, il suo 1° membro verrà indicato con  $g_3$ ; quanto a  $K_{n-3}$  lo chiameremo il *cono hessiano* della  $C^n$  (in relazione ad  $U$ ) per ragioni che esporremo nel prossimo lavoro.

Oltre ai conì predetti sono anche seminvarianti i conì o (se la loro dimensione supera  $n-1$ ) i sistemi costituiti dagli spazi lineari ad essi tangenti, osculatori, ecc., cioè le proiezioni delle sviluppabili osculatrici alle  $C^{n-h-1}$  predette, o infine le proiezioni delle sviluppabili  $\Sigma_k$  dagli spazi  $\omega_h$  ( $k \leq n-h-2$ ).

È specialmente notevole il caso  $k = n-h-2$ . Posto  $h = n-i-1$  e quindi  $k = i-1$  si ha in questo caso un sistema  $\infty^1$  di iperpiani (seminvariante) congiungenti  $\omega_{n-i-1}$  cogli  $S_{i-1}$  osculatori a  $C^n$ , che noi indicheremo con  $A_i$ . In particolare se  $i=1$  si ha  $A_1 = K_{n-1}$ , e per  $i=n$ , se ben la definizione precedente non abbia rigorosamente senso, è ovvio che si deve porre  $A_n = \Sigma_{n-1}$  identificando  $A_n$  col sistema degl' iperpiani osculatori a  $C^n$ .

Vedremo tra poco che l'equazione del sistema  $A_i$  è

$$(24) \quad a_x^i = 0,$$

nella quale  $x$  (o  $x_1, x_2$ ) s'interpreti come parametro: per ora accontentiamoci di rilevarne che il sistema  $A_i$  ha l'indice  $i$ , cioè per un punto generico di  $S_n$  passano  $i$  iperpiani di  $A_i$ : giacchè tale è il grado della (24) nel parametro  $x$ .

I sistemi  $A_i$  si chiameranno *sistemi fondamentali seminvarianti*.



17. Costruiamo ora le figure polari, in  $R$ , dei sistemi  $A_i$ , che saranno esse pure seminvarianti. Sono evidentemente *curve*, sezioni di  $\omega_i$  colla sviluppabile  $\Sigma_{n-i}$ ; e poichè  $A_i$  ha l'indice  $i$ , così la curva polare ha l'ordine  $i$ ; essa è dunque una curva razionale normale che noi indicheremo con  $E^i$ .

Procuriamoci le equazioni della  $E^{n-1}$ , sezione dell'iperpiano fondamentale  $\omega$  colla sviluppabile delle tangenti a  $C$ . Anzichè seguire il procedimento che la natura della questione indicherebbe come il più ovvio, teniamoci più vicini alle nostre interpretazioni procedendo così:

Sia  $P(x=\lambda)$  un punto di  $C^n$ ,  $t$  la relativa tangente,  $Q$  il suo incontro con  $\omega$ , che starà su  $E^{n-1}$ . Degli  $n$  iperpiani osculatori a  $C^n$  uscenti da  $Q$ , uno è  $\omega$ , e gli altri  $n-1$  coincidono coll'iperpiano osculatore in  $P$ : sicchè il  $G_n$  corrispondente a  $Q$  è costituito dal punto  $U$  ( $x=\infty$ ) e dal punto  $n-1$ -plo  $P$ . Nella forma corrispondente sarà dunque  $a_0=0$  (e ciò era evidente a priori giacchè  $Q$  sta in  $\omega$ ) talchè quella forma riducesi a

$$(25) \quad \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots + a_n x_2^n,$$

ma di più, per quanto precede, essa a meno d'un fattore deve identificarsi con

$$x_2 (x_1 - \lambda x_2)^{n-1},$$

e ciò porge subito le coordinate di  $Q$  in funzione di  $\lambda$ , cioè le equazioni parametriche di  $E^{n-1}$  sotto la forma

$$(26) \quad \varrho a_i = (-1)^{i-1} i \lambda^{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Facciamo ora in  $\omega$  la trasformazione di coordinate indicata dalle posizioni

$$(27) \quad b_{i-1} = \frac{1}{i} a_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

allora la (26) diviene

$$(28) \quad \varrho b_j = (-1)^j \lambda^j \quad (j=0, 1, \dots, n-1),$$

cioè si riduce alla forma (2) delle equazioni di  $C^n$ : e la (25) divisa per  $x_2$  riducesi, a meno d'un fattore alla  $b_2^{n-1}$ . Più in generale si vede facilmente che se  $Q$  è un punto *qualunque* di  $\omega$  (anche fuori di  $E^{n-1}$ ) cioè rappresenta un  $G_n$  composto di un  $G_{n-1}$  e del punto (improprio)  $U$  la forma  $b_2^{n-1}$  corrispondente a quel  $G_{n-1}$  ha per coefficienti le coordinate  $b_j$  di  $Q$ . Sicchè le coordinate  $b_j$  hanno in  $\omega$  rispetto alla  $E^{n-1}$  lo stesso significato della  $a_i$  in  $S_n$  rapporto a  $C^n$ : per questa ragione noi le chiameremo *coordinate proprie* entro lo spazio  $\omega$ .



Tenendo presente che la  $E^{n-2}$  si costruisce partendo da  $E^{n-1}$ , come  $E^{n-1}$  a partire da  $C^n$  possiamo introdurre le coordinate proprie anche in  $\omega_{n-2}$  ponendo  $c_{i-1} = \frac{1}{i} b_i$ , e così via.

18. Riguardiamo ora le (27) scritte sotto la forma

$$(29) \quad a'_i = i a_{i-1}, \quad a'_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

non più come rappresentanti una trasformazione di coordinate entro  $\omega$ , ma come equazioni di un'omografia  $M$  in  $S_n$ . Si tratta evidentemente di un'omografia *degenere* la quale muta ogni punto di  $S_n$  in un punto di  $\omega$  (fatta eccezione per  $U$  il cui omologo è indeterminato) ed inversamente un punto di  $\omega$  in tutti i punti d'una retta della stella di centro  $U$ . L'omografia ( $M$ ) che rimane così indotta fra la stella predetta e l'iperpiano  $\omega$  non è degenere, e può ritenersi ancora rappresentata dalle (29), qualora  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  s'interpretino, com'è lecito, quali coordinate omogenee di una retta della stella  $U$ .

Proveremo tra poco che la  $M$ , tra altre proprietà importanti che giustificano l'appellativo di *omografia fondamentale* con cui la denomineremo, gode anche della proprietà di essere un'operazione *seminvariante*. Per ora accontentiamoci di rilevare che se nelle (29) al posto delle  $a_{i-1}$  si pongono le loro espressioni (2), si ottengono, salvo lo scambio delle  $a_i$  colle  $a'_i$ , le (26), dunque l'omografia *fondamentale* muta la  $C^n$  nella  $E^{n-1}$ , o in modo più preciso la  $M^{-1}$  muta  $E^{n-1}$  nel cono  $K_0$  che da  $U$  proietta  $C^n$ .

19. Ritorniamo ora a considerare le proiezioni di  $C^n$  dagli spazi  $\omega_h$ , e, per semplicità poniamo dapprima  $h = 0$ , cioè fissiamo l'attenzione sulla  $C^{n-1}$  proiezione di  $C^n$  da  $U$  nello spazio  $a_n = 0$ . La proiezione di  $U$  è ivi il punto  $U'$  traccia della tangente a  $C^n$  in  $U$  (di coordinate  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-2} = 0, a_{n-1} = 1$ ).

È facile vedere, e ne diremo meglio al paragrafo seguente, che un'omografia del sottogruppo  $\Omega$ , in quanto induce un'omografia nella stella  $U$ , dà per *sezione* con  $a_n = 0$  un'omografia del sottogruppo  $\Omega'$  relativo alla predetta  $C^{n-1}$  e al punto  $U'$ ; e che ogni omografia di  $\Omega'$  può pensarsi dedotta in questo modo da una ed una sola omografia di  $\Omega$ . Ne consegue che ogni ente seminvariante entro  $a_n = 0$  (cioè invariante per  $\Omega'$ ) dà per proiezione da  $U$  un ente (della stella  $U$ ) seminvariante in  $S_n$ .

Consideriamo in particolare la polarità fondamentale  $R'$  relativa a  $C^{n-1}$ ; ne dedurremo, per proiezione da  $U$ , una polarità *degenere* (o singolare) di  $S_n$  definita dalla condizione di chiamare coniugati due punti di  $S_n$  quando lo sono, rispetto ad  $R'$ , le loro proiezioni da  $U$  su  $a_n = 0$ . Poichè (n° 10) l'equazione di  $R'$  nel proprio spazio è  $(ab)^{n-1} = 0$ , tale

sarà anche in  $S_n$  l'equazione della polarità che ne abbiamo dedotto per proiezione.

Più in generale l'equazione

$$(30) \quad (ab)^k = 0 \quad (k \leq n),$$

dà in  $S_n^{24}$  una polarità (degenere se  $k < n$ ) che si ottiene proiettando da  $\omega_{n-k-1}$  la polarità fondamentale d'una  $C^k$  proiezione di  $C^n$  su di un  $S_k$ . La indicheremo con  $R_k$  o con  $(R_k)$  secondo che ci occorrerà di considerarla in  $S_n$  o nella stella che ha per centro  $\omega_{n-k-1}$ , nel qual caso non è degenere. In particolare sarà  $R_n = R$ .

Dalla (30) si ricavano subito, le equazioni di  $R_k$  sotto la forma

$$(31) \quad \varrho u_i = \binom{k}{i} (-1)^i a_{k-i}, \quad u_j = 0, \\ (i = 0, 1, \dots, k; j = k+1, \dots, n),$$

analoga alla (4); e non sarà inopportuno osservare che se  $k < n-1$  l'equazione di  $R_k$  sotto forma duale della (30) (cioè fra le  $u_i$ ) svanisce identicamente perchè la caratteristica della matrice della sostituzione (31) è minore di  $n$ .

È inoltre ovvio, per la stessa costruzione di  $R_k$ , che essa, per  $k$  dispari è un sistema nullo, e per  $k$  pari ha come quadrica fondamentale il cono che da  $\omega_{n-k-1}$  proietta la quadrica di Clifford relativa a  $C^k$ . Con riferimento al fatto che l'equazione del luogo fondamentale relativo ad  $R_k$ , ove non sia identica ( $k$  dispari) non svanisce identicamente mentre svanisce sempre, per  $k < n-1$  quella dell'involuppo<sup>25</sup>, e ritenendo opportuno introdurre una denominazione concisa, chiameremo  $R_1, R_2, \dots, R_k$  le *polarità fondamentali luogo* (seminvarianti) relative a  $C^n$ .

La polarità  $R_k$  può anche definirsi in relazione al sistema fondamentale  $A_k$ . Nella stella di iperpiani che ha per centro  $\omega_{n-k-1}$  (pensata come uno spazio lineare del quale l'elemento sia l'iperpiano)  $A_k$  è una curva razionale normale: orbene  $R_k$  è appunto la polarità fondamentale relativa.

Trasformando mediante  $R$  la  $R_k$ , e valendosi della definizione predetta, si ottiene una nuova polarità, che può definirsi chiamando coniugati due iperpiani di  $S_n$  quando le loro sezioni collo spazio  $\omega_k$  (polare in  $R$  di  $\omega_{n-k-1}$ ) sono coniugate nella polarità fondamentale definita da  $E^k$  (polare di  $A_k$ ). Questa polarità verrà indicata con  $P_k$ : in particolare sarà da porsi  $P_n = R_n = R$ . Le  $P_1, P_2, \dots, P_k$  si chiameranno *polarità fondamentali involuppo* (seminvarianti) relative a  $C^n$ .

<sup>24</sup>) S' intende che il simbolo  $(ab)^k$  va sviluppato come se fosse relativo ad una  $f_k$  di coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_k$ . Questa avvertenza valga per casi analoghi che incontreremo di frequente nel seguito.

<sup>25</sup>) Per  $k = n-1$  l'involuppo riducesi alla stella  $U$  contata due volte.

Le loro equazioni si trovano subito in vari modi: per esempio trasformando mediante la (4) le (30) (31). Si ottengono così per  $P_k$  le

$$(32) \quad \sum_{i=0}^k (-1)^i (n-i)! (n-k+i)! u_{n-i} v_{n-k+i} = 0,$$

$$(33) \quad \varrho a_{n-i} = (-1)^i (n-i)! (n-k+i)! u_{n-k+i}, \quad (i=0, 1, \dots, k) \\ a_0 = a_1 = \dots = a_{n-k-1} = 0.$$

20. Facciamo ora il prodotto di  $R_{n-1}$  per  $R$  e di  $R$  per  $P_{n-1}$ . Nel primo caso partendo da un punto  $Q$  di  $S_n$  se ne dovrà trovare l'iperpiano polare in  $R_{n-1}$ , che passa per  $U$  ed indi il polo  $Q'$  di quell'iperpiano in  $R$  che giacerà in  $\omega$ : nel secondo caso, trovato l'iperpiano polare di  $Q$  in  $R$  se ne costruirà il polo nella  $P_{n-1}$  (cioè il polo della sezione di quell'iperpiano con  $\omega$ , rispetto alla polarità fondamentale di  $E^{n-1}$ ) che giace pure in  $\omega$ . Sicchè in entrambi i casi si ha un'omografia degenera che muta un punto generico di  $S_n$  in un punto di  $\omega$ : e le formule (31) (33) mostrano con facile calcolo che si tratta proprio dell'omografia fondamentale  $M$ , conducendo così alle *notevoli relazioni* (che, tra altro, provano la seminvarianza di  $M$ )

$$(34) \quad M = R_{n-1} R = R P_{n-1}.$$

Riprendiamo ora l'equazione differenziale  $X\varphi = 0$ : posto in essa  $w_i = \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}$  cioè indicate con  $w$  le coordinate dell'iperpiano polare del punto  $a_i$  rispetto all'ipersuperficie seminvariante  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ , possiamo scriverla sotto la forma

$$(35) \quad \sum_{i=0}^n i a_{i-1} w_i = 0,$$

la quale esprime che quell'iperpiano passa per il punto di coordinate  $i a_{i-1}$ , cioè, in virtù delle (29) per il punto omologo del polo  $a_i$  nell'omografia fondamentale. Giungiamo così alla seguente *interpretazione geometrica dell'equazione differenziale fondamentale*:

*L'iperpiano polare di un punto generico  $P$  di  $S_n$  rispetto ad una ipersuperficie seminvariante  $\varphi = 0$  passa per il punto corrispondente a  $P$  nell'omografia fondamentale  $M$ .*

In particolare se  $P$  cade su  $\varphi = 0$  quell'iperpiano è ivi tangente: dunque la retta che congiunge un punto  $P$  di un'ipersuperficie seminvariante col suo corrispondente  $P'$  nell'omografia fondamentale, tocca quell'ipersuperficie in  $P$ .

Vedremo nel prossimo lavoro un più espressivo significato di questa proprietà.

Infine, tenendo conto delle (34) l'interpretazione geometrica predetta può anche enunciarsi come segue.

*Gl'iperpiani polari di un punto generico dello spazio rispetto ad una ipersuperficie seminvariante e alla polarità  $R_{n-1}$  (oppure  $R$ ) sono coniugati nella polarità  $R$  (o rispettivamente  $P_{n-1}$ ).*

21. Tra gli enti seminvarianti hanno naturalmente importanza preminente le varietà ed in particolare le ipersuperficie. Ad esse verrà in gran parte dedicato il prossimo lavoro: qui limitiamoci a notare che il caso delle superficie conduce (come per il gruppo totale il caso delle  $V_3$ ) a considerare le *traiettorie del sottogruppo  $\Omega$* . Esse sono superficie algebriche (anzi, come si vedrà a suo luogo, razionali) di ordine  $n \cdot (n-1)^{26}$  e riempiono in  $S_n$  un sistema algebrico  $T, \infty^{n-2}$  d'indice 1: ogni varietà seminvariante (di dimensione  $> 1$ ) contiene la superficie di  $T$  che passa per un suo punto generico.

Occupiamoci invece brevemente di alcuni sistemi d'ipersuperficie che sono nel loro complesso seminvarianti senza che lo siano i loro singoli elementi.

Sia  $\Phi_0$  un'ipersuperficie invariante per il sottogruppo isobarico, cioè rappresentata annullando una (arbitraria) forma isobarica  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , e sia  $H$  una qualunque trasformazione di  $\Omega$  che muti  $O$  in  $P$  ( $x = \xi$ ). La  $H$  trasforma  $\Omega_0$  in  $\Omega_P$  e quindi  $\Phi_0$  in un'ipersuperficie  $\Phi_P$  invariante per il sottogruppo  $\Omega_P$ : onde il sistema  $\infty^1$  delle  $\Phi_P$  è nel suo complesso mutato in sè da  $\Omega$  cioè seminvariante.

Scegliendo come  $H$  la trasformazione considerata al n° 7, e ricordando le (12) si giunge così al teorema:

*Se  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  è una forma isobarica, il sistema  $\infty^1$  d'ipersuperficie*

$$(36) \quad \varphi(a_0, a_\xi, a_\xi^2, \dots, a_\xi^n) = 0,$$

*( $\xi$  parametro) è seminvariante.*

L'indice di quel sistema è evidentemente eguale al grado del 1° membro di (36) rispetto al parametro  $\xi$ .

Il caso più semplice è evidentemente quello in cui  $\varphi$  riducesi ad una delle sue variabili, per esempio ad  $a_i$ . Allora  $\Phi_0$  cioè  $a_i = 0$  è l'iperpiano congiungente  $\omega_{n-i-1}$  collo  $S_{i-1}$  osculatore a  $C^n$  in  $O$  e pertanto il sistema  $\infty^1$  generato da  $\Phi_0$  altro non è che il sistema  $A_i$  considerato al n° 16. A norma della (36) la sua equazione è pertanto  $a_i^t = 0$  come avevamo asserito.

<sup>26</sup> Quest'ordine si determina facilmente con procedimento analogo a quello del n° 12.

Poichè una trasformazione di  $\Omega$  che muti, sulla  $C^n$ ,  $P$  in  $Q$ , muta  $\Phi_P$  in  $\Phi_Q$ , così quel gruppo subordina entro al sistema  $\infty^1$  (razionale) delle  $\Phi_P$  un gruppo isomorfo a quello subordinato sulla  $C^n$ . Ma tutte le trasformazioni di questo lasciano fisso il punto  $U$ , dunque lo stesso accadrà di  $\Phi_U$  per tutte le trasformazioni di  $\Omega$ , cioè  $\Phi_U$  sarà seminvariante. Tenendo presente che il punto  $U$  corrisponde a  $\xi = \infty$ , si giunge subito alla conclusione seguente: *Se  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  è una forma isobarica, il coefficiente della più alta potenza di  $\xi$  in  $\varphi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  è seminvariante.*

Si badi che in generale, cioè se i coefficienti della  $\varphi$  non soddisfano a relazioni speciali, quel coefficiente è  $a_0^l$ ,  $l$  essendo il grado di  $\varphi$ . Ma in casi particolari il termine contenente la più alta potenza  $p$  (peso di  $\varphi$ ) di  $\xi$ , che avrebbe per coefficiente (a meno d'un fattore numerico)  $a_0^l$  può svanire identicamente, e allora si giunge ad un risultato espressivo.

Così ad esempio se si pone

$$\varphi = a_0 a_3 - a_1 a_2,$$

la corrispondente (36) è

$$(37) \quad 2(a_0 a_3 - a_1^2)\xi + (a_0 a_2 - a_1 a_3) = 0,$$

e rappresenta un *fascio di quadriche* seminvariante. Il coefficiente della più alta potenza di  $\xi$  (liberato dal fattore 2) è il *seminvariante hessiano*  $g_2$  cioè il 1° membro dell'equazione del cono hessiano ( $n^\circ 16$ ).

Vedremo nel prossimo lavoro altre notevoli generazioni di sistemi, ed in particolare di fasci seminvarianti.

## § 5.

### Trasporto in $S_n$ dell'operazione di polare tra gruppi di punti.

22. Abbiamo visto al  $n^\circ 16$  che mediante la proiezione della  $C^n$  dai suoi spazi osculatori in un punto, i gruppi  $G_n$  d'una retta  $r$ , o, il che è lo stesso, della  $C^n$ , son posti in speciale relazione cogli analoghi  $G_{n-1}$ . Ci proponiamo ora di approfondire questa relazione, mostrandone gl'intimi legami colla polarità tra gruppi di punti: allo scopo, movendo dal caso più semplice, incominciamo a dimostrare la proposizione seguente:

*Sian dati sulla  $C^n$  un  $G_n$  ed un punto  $Q$ : ed assunto quest'ultimo come centro di proiezione, si proietti  $C^n$  in una  $C^{n-1}$  di un  $S_{n-1}$  non passante per  $Q$ .*

*Allora, detto  $P$  il punto di  $S_n$  immagine del  $G_n$ , la proiezione  $P'$  di  $P$  in  $S_{n-1}$  individua su  $C^{n-1}$  un  $G_{n-1}$ . Orbene questo (trasportato se si vuole su  $C^n$ ) è il gruppo (primo) polare di  $Q$  rispetto al  $G_n$ .*

Eseguendo il trasporto su  $C^n$  si vede che il  $G_{n-1}$  si costruisce proiettando da  $Q$  i punti di contatto degli  $n-1$   $S_{n-2}$  osculatori a  $C^{n-1}$  condotti per  $P'$ , e quindi che, su  $C^n$ , il  $G_{n-1}$  è il gruppo dei punti di contatto degli  $S_{n-2}$  osculatori appoggiati alla retta  $QP$ .

Attesa la covarianza delle operazioni predette rispetto alle proiettività che trasformano simultaneamente il  $G_n$  e  $Q$ , e l'analoga covarianza dei gruppi polari, basterà dimostrare la cosa per una posizione particolare di  $Q$ .

Suppongasi pertanto che  $Q$  cada in  $U$  ( $x_1 = 1, x_2 = 0$ ), e sia  $a_s^n$  la forma corrispondente al  $G_n$ , cioè  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  le coordinate di  $P$ . Se la proiezione si fa sullo  $S_{n-1}$  opposto ad  $U$  nella piramide fondamentale, le coordinate di  $P'$  sono  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$  cioè la forma corrispondente al  $G_{n-1}$  predetto è  $a_s^{n-1}$ . Ma tale è anche (a meno d'un fattor costante) la forma che eguagliata a zero dà il gruppo polare di  $U$  rispetto ad  $a_s^n$  giacchè, per  $U$ , l'operazione di polare riducesi alla  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ , cioè in coordinate non omogenee alla  $\frac{d}{dx}$ , c. d. d.

La proposizione ora dimostrata si generalizza subito, e così si trova che il gruppo polare (misto) di  $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$  rispetto ad un  $G_n$  è il  $G_{n-h}$  dei contatti degli  $S_{n-h-1}$  osculatori appoggiati allo  $S_h$  individuato da  $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$  e dal punto  $P$  immagine del  $G_n$ .

Facendo coincidere  $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$  in  $Q$  si trova così il gruppo polare  $h$ -esimo di  $Q$ : esso corrisponde al punto  $P'$  proiezione di  $P$  in un  $S_{n-h}$  dove si proietti la  $C^n$  dallo  $S_{h-1}$  osculatore in  $Q$ , cioè alla forma  $a_s^{n-h}$ .

In particolare se  $h = n-1$  il punto  $(n-1$ -esimo) polare di  $Q$  rispetto al  $G_n$  è l'ulteriore intersezione di  $C^n$  collo  $S_{n-1}$  che passa per  $P$  e per lo  $S_{n-2}$  osculatore in  $Q$ . Così dati due punti  $A, B$  di una conica, il punto polare di un altro punto  $Q$  della conica rispetto alla coppia  $AB$  è l'ulteriore intersezione di essa colla retta che congiunge  $Q$  al polo  $P$  di  $AB$  (cioè il coniugato armonico di  $Q$  rispetto alla coppia  $AB$ ).

Partendo dalle costruzioni indicate si possono dimostrare in modo semplice e rapido, e senza alcun sussidio analitico le principali proprietà dei gruppi polari<sup>27)</sup>. Il lettore potrà facilmente persuadersene.

23. Ritornando a considerare la proiezione da  $U$ , se nello  $S_{n-1}$ ,  $a_n = 0$ , su cui si proietta, si tien fisso il punto  $P'$ , il punto  $P$  può

<sup>27)</sup> Per esempio: la molteplicità di un punto  $i$ -plo del  $G_n$  per i suoi gruppi polari: il teorema di permutabilità nella sua forma più generale: Il gruppo polare misto di  $O_1, O_2, \dots, O_h$  rispetto ad un  $G_n$  coincide col gruppo polare misto di  $O_1, O_2, \dots, O_i$  rispetto al  $G_{n-(h-i)}$ , polare di  $O_{i+1}, \dots, O_h$  rispetto al  $G_n$ , la legge di reciprocità, ecc.

variare sulla  $UP'$ ; alle posizioni di  $P$  rispondono su  $r$  i gruppi d'una serie lineare  $g'_n$  e, rispetto ad essi, il  $G_{n-1}$  polare di  $U$  è *fisso*. Proprietà ben nota.

Una proiettività  $\pi$  di  $r$  che lasci fisso il punto improprio, se considerata come operante sui  $G_n$  dà in  $S_n$  un'omografia  $\Pi$  di  $\Omega$ , e se pensata come operante sui  $G_{n-1}$ , dà in  $a_n = 0$  un'omografia  $\Pi'$  del sottogruppo  $\Omega'$  analogo ad  $\Omega$ . Poichè l'operazione di polare ha carattere proiettivo, ed  $U$  è fisso in  $\Pi$ , il  $G_{n-1}$  polare di  $U$  rispetto ad un  $G_n$  verrà da  $\pi$  trasformato nel  $G_{n-1}$  polare del  $G_n$  corrispondente. Tanto val dunque dire, tenendo anche presente l'osservazione suesposta, che  $\Pi'$  si ottiene da  $\Pi$  segnando con  $a_n = 0$  la proiettività indotta da  $\Pi$  nella stella  $U$ , come s'era con minor precisione rilevato al n° 19.

Ritornando a considerare un  $G_n$  di  $C^n$  di cui sia  $P$  l'immagine, il  $G_{n-1}$  polare di  $G_n$  rispetto ad un punto  $Q$  di  $C^n$  descrive, al variare di  $Q$ , una  $g_{n-1}^1$ . I  $2(n-2)$  punti doppi di questa serie costituiscono notoriamente il *gruppo hessiano* del  $G_n$ , e i relativi poli ne danno il *gruppo steineriano*.

Se  $D$  è un punto del gruppo hessiano e  $Q$  il corrispondente polo, lo  $S_{n-2}$  osculatore a  $C^n$  in  $D$  dovrà, per quanto si è detto sopra, appoggiarsi alla retta  $QP$ , e quindi individua con essa un  $S_{n-2}$  che ha con  $C^n$  un incontro semplice in  $Q$ , uno  $n-2$ -plo in  $D$ , ed inoltre passa per  $P$ . Viceversa un  $S_{n-2}$  siffatto contiene lo  $S_{n-2}$  osculatore in  $D$  il quale pertanto si appoggia alla retta  $PQ$ ; dunque:

*Per un punto generico  $P$  di  $S_n$  passano  $2(n-2)$  spazi  $S_{n-2}$  aventi contatto  $n-2$ -plo e seganti altrove  $C^n$  in un punto. I due gruppi dei contatti e degl'incontri semplici sono rispettivamente l'hessiano e lo steineriano del  $G_n$  corrispondente a  $P$ .<sup>28)</sup>*

In particolare se  $n=3$  quei due gruppi coincidono coi punti d'appoggio della corda di  $C^n$  uscente da  $P$ .

Vedremo nel prossimo lavoro in che relazione stia il gruppo hessiano d'un  $G_n$  col cono hessiano  $g_2 = 0$  considerato al n° 16.

<sup>28)</sup> Cfr. Loria, *Sulle curve razionali normali in uno spazio a  $n$  dimensioni* [Giorn. di Mat. 26 (1888), S. 334-347], n° 14.



# Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln.

Von

E. Study in Bonn.

(Dritte Fortsetzung.)

## Inhalt.

### Zweiter Abschnitt (Schluß).

- 11. Ergänzungen (Kurven 3. Ordnung mit vier vorgeschriebenen Tangenten).
- 12. Oskulierende Vereine und Elemente höherer Ordnung.

### 11. Algebraische Ergänzungen (Kurven 3. Ordnung mit vier vorgeschriebenen Tangenten).

Die orientierten Kurven 4. Klasse, von denen in § 10 die Rede war, sind, wie gesagt, alle miteinander äquivalent gegenüber der Gruppe  $G_{10}$ . An irgendeiner von ihnen kann man schon alle ihre gegenüber  $G_{10}$  invarianten Eigenschaften studieren. Sie ordnen sich aber auch in den Gedankenkreis der projektiven Geometrie auf einer Fläche 2. Ordnung ein, und dann wird es sich vor allem um ihre Klassifikation gegenüber der Gruppe  $G_6$  handeln.

### Figuren der Familie a).

Wie ebenfalls aus unseren Darlegungen hervorgeht, existiert im Falle a) eine absolute Invariante; nur sechs von den sieben wesentlichen Konstanten einer solchen Kurve können durch Transformationen der Gruppe  $\Gamma_6$  weggeschafft werden. Hieraus ergibt sich ein algebraisches Problem, das natürlich auch auf den *Bildraum* übertragen werden kann, und dann seine (der Natur der Sache nach vielgestaltige) Lösung z. B. in dem folgenden Lehrsatz findet:

XIV. Die Bildkurve jeder Kurve 4. Klasse der Familie a) ist gegenüber der Gruppe  $\Gamma_6$  äquivalent mit jeder Kurve eines oder des anderen der Kurvenpaare



$$(1) \quad \begin{cases} \xi_0 = l_1(t) = 1 + 2t, \\ \xi_1 = l_2(t) = C - 3t^2 + 2t^3, \\ \xi_2 = r_1(t) = +(1 - 2t), \\ \xi_3 = r_2(t) = +(C + 3t^2 + 2t^3), \end{cases} \quad \{C \neq -1\}$$

und zwar (mit jeder von beiden) auf vier verschiedene Arten.

Da die heuristische Entwicklung, die zu diesem Lehrsatz führt, ziemlich viel Raum beanspruchen würde, so soll seine Richtigkeit nur nachträglich festgestellt werden. Wir halten uns dabei an die Annahme der oberen Vorzeichen in (1).

Zunächst bemerken wir, daß dem uneigentlichen Parameterwerte  $t = \infty$  eine der vier ausgezeichneten Tangenten unserer Kurve  $\xi(t)$  entspricht. Die drei übrigen erhält man dann durch Auflösung einer kubischen Gleichung

$$(2) \quad \frac{1}{2} (ll') = \frac{1}{2} (rr') = 4t^3 - 3t - C = 0.$$

Diese hat die aus Weierstraß' Theorie der elliptischen Funktionen bekannte Form  $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$ ; es ist also

$$(3) \quad g_2 = 3, \quad g_3 = C,$$

und die Invariante  $G$ , die hier die Diskriminante einer binären Form 4. Ordnung vertritt<sup>72)</sup>, hat den Wert

$$(4) \quad G = \frac{27}{16} (1 - C) (1 + C).$$

Danach ist  $G \neq 0$ ,  $g_2 \neq 0$ , was aussagt, daß die vier ausgezeichneten Stellen der Kurve alle voneinander verschieden sind und kein äquianharmonisches Quadrupel bilden (88, S. 235).

Ist nun eine im Komplex  $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$  gelegene Kurve 3. Ordnung gegeben, deren vier in der absoluten Kongruenz gelegene Tangenten *getrennt* und *nicht äquianharmonisch* sind, so kann man den Parameter  $t$  immer (und zwar auf zwei Arten,  $t' = +t$ ) so wählen, daß irgendeine der vier Tangenten dem Wert  $t = \infty$  entspricht, und die drei anderen zu den Wurzeln einer Gleichung der Form (2) gehören. Die durch die Gleichung (1) bestimmte Figur einer Kurve 3. Ordnung mit vier Tangenten ist dann zu der gegebenen notwendig kollinear, und zwar vermöge einer Kollineation aus der Gruppe  $(\Gamma_6, H_6)$ . Liegt eine Transformation aus der Schar  $H_6$  vor, so ändere man das Vorzeichen von  $C$  und  $t$ , wobei (2) ungeändert bleibt, die Kurve (1) aber einer weiteren Transformation von  $H_6$  unterworfen wird.

In jedem Falle erhält man so eine Kurve der Schar (1) — bei Annahme nur der oberen Vorzeichen — durch eine Transformation der Gruppe  $\Gamma_6$ . Der zugehörige Wert von  $C$  ist, wie die Ableitung zeigt, *eindeutig* bestimmt. Eben derselbe Wert von  $C$  würde, wie man dann nachträglich zeigen kann, sich auch eingestellt haben, wenn man den uneigentlichen Parameterwert einer anderen der vier ausgezeichneten

<sup>72)</sup> Bei Darstellung der vier ausgezeichneten Stellen der Kurve mit Hilfe einer binären Form 4. Ordnung  $(at)^4$  ist

$$g_2 = \frac{1}{2} (aa')^4, \quad g_3 = \frac{1}{6} (aa')^3 (aa'')^3 (a'a'')^2, \quad G = \frac{1}{16} (g_2^2 - 27 g_3^2).$$

Tangenten zugeordnet hätte<sup>73)</sup>. Hiermit ist der Satz XIV bewiesen: Die Konstante  $C$  selbst — nicht, wie man zunächst annehmen könnte, erst  $C^9 = 27 \frac{9^3}{9^3}$  — ist eine absolute Invariante der Gruppe  $\Gamma_8$ .

Im Zusammenhange hiermit ergibt sich nun eine Reihe weiterer algebraischer Aufgaben, deren wohl wichtigste diese ist:

*Es sollen (in Parameterdarstellung der Koordinaten ihrer Punkte) die Kurven 3. Ordnung gefunden werden, die in einem vorgeschriebenen Komplex ( $\Sigma_{01} - \Sigma_{23} = 0$ ) liegen, und in einer nicht singulären Kongruenz 1. Ordnung 1. Kl. dieses Komplexes (in der absoluten Kongruenz  $\Sigma_{01} = \Sigma_{23} = 0$ ) vier passend gegebene Tangenten haben<sup>74)</sup>.*

Diese Aufgabe (oder die mit ihr äquivalente der Bestimmung der Kurven 4. Klasse auf der Fläche  $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$  mit gegebenen stationären Punkten) scheint mir ein erhebliches algebraisches Interesse zu haben. Sie läßt nämlich eine endliche, aber nicht immer dieselbe Zahl von Lösungen zu, und sie erscheint dann als Repräsentantin, ja wohl als das einzige bis jetzt bekannte nicht triviale Beispiel, eines Typus algebraisch-geometrischer Probleme, die von den gewöhnlich behandelten Aufgaben derart bedeutend abweichen<sup>75)</sup>. Sie verdient daher eine eingehende Untersuchung, ohne die eine genügende Einsicht in ihre wahre Natur kaum erlangt werden könnte.

Der Kern des bezeichneten Problems liegt offenbar in der Frage nach dem Wurf, den die Berührungspunkte  $a, b, c, d$  der vier Tangenten auf den zu suchenden Kurven bestimmen. Man zeigt mühelos, daß, wenn dieser Wurf mitgegeben wird, die Aufgabe im Falle ihrer Lösbarkeit (bei „passend“ gegebenen Tangenten) stets zwei Lösungen zuläßt. Aber dieser Wurf selbst wird durch die vorgeschriebenen Tangenten nicht immer eindeutig bestimmt.

Der Wurf  $a, b, c, d$  ist nun gekennzeichnet durch das System der Doppelverhältnisse, die man aus den vier Stellen des binären Gebiets der Kurve bilden kann, und

<sup>73)</sup> Ist  $C \neq 0$ , also  $g_3 \neq 0$ , so gibt es bekanntlich überhaupt nur vier automorphe Kollineationen der betrachteten Figur, und diese gehören alle zur Gruppe  $\Gamma_8$ . Im harmonischen Fall  $C = 0$  kommen noch vier Kollineationen hinzu, die aber in der Schaar  $H_4$  liegen. Beide Male ist demnach vier die gesuchte Zahl.

<sup>74)</sup> Die Tangenten müssen eine besondere Lage haben, wenn die Aufgabe nicht widersinnig sein soll. Siehe den weiteren Text und Formeln (10), (11).

<sup>75)</sup> Vielfach lassen sich die Lösungen eines endlich-deutigen geometrischen Problems reinlich den Wurzeln einer algebraischen Gleichung zuordnen, und so gewöhnlich ist dieses Vorkommen, daß man es zu einem allgemeinen Gesetz — *loi* — (zu dem Lehrsatz oder „Prinzip“ der „Erhaltung der Anzahl“) hat stampeln wollen. Man legte dabei alles Gewicht auf Anwendungen dieses vermeintlichen Gesetzes — die in schier unzähliger Menge gemacht worden sind — und gar keines auf eine präzise Abfassung der Behauptung selbst (siehe z. B. Zeuthen, Artikel *Géométrie énumérative* der französischen Enzyklopädie). So kam es, daß man an sehr zahlreichen und wohl-bekannten Gegenbeispielen *trivialer* Art keinen Anstoß genommen hat. Aber natürlich genügen auch diese schon zur Widerlegung (s. Archiv der Mathematik und Physik (3) 8 (1905), S. 271 und Leipziger Berichte 1916, S. 65). —

Seit dieses geschrieben wurde, hat Herr H. Mohrmann auf einen weiteren sehr schönen, aber ganz anders gearteten Fall aufmerksam gemacht, in dem der richtige Sachverhalt zwar schon bekannt, aber vorher nicht als Gegenbeispiel zu dem Satz von der Erhaltung der Anzahl betrachtet worden war. (Archiv der Mathematik und Physik (3) 27, S. 44).

diese wiederum hängen von drei durch die Gleichung  $u + v + w = 0$  verbundenen Verhältnissgrößen, nämlich von gewissen Produkten

$$(5) \quad u = (ab)(cd), \quad v = (ac)(db), \quad w = (ad)(bc)$$

binärer Invarianten in bekannter Weise ab:

$$D_1 = (a, b, c, d) = \frac{(ac)(bd)}{(ad)(bc)} = -\frac{v}{w}, \quad D'_1 = (a, b, d, c) = -\frac{w}{v},$$

$$D_2 = (a, c, d, b) = \frac{(ad)(cb)}{(ab)(cd)} = -\frac{w}{u}, \quad D'_2 = (a, c, b, d) = -\frac{u}{w},$$

$$D_3 = (a, d, b, c) = \frac{(ab)(dc)}{(ac)(db)} = -\frac{u}{v}, \quad D'_3 = (a, d, c, b) = -\frac{v}{u},$$

Es handelt sich also um die Bestimmung der Verhältnisse  $u : v : w$ , und zwar unter der besonderen Voraussetzung, daß die Schnittpunkte  $a_i, b_i, c_i, d_i, a_r, b_r, c_r, d_r$  von  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  mit den Leitlinien der absoluten Kongruenz und damit die ihnen nach Analogie von  $u : v : w$  entsprechenden Verhältnissgrößen  $u_i : v_i : w_i$  und  $u_r : v_r : w_r$  von vornherein gegeben sind.

Bekannt sind hier natürlich auch die bilinearen Kollineationsinvarianten  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$  usw., die zu je zweien der vier Geraden gehören. Aus ihnen bilden wir die Produkte

$$(6) \quad U = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{D}), \quad V = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{D}\mathfrak{B}), \quad W = (\mathfrak{A}\mathfrak{D})(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

Wir haben dann, nach § 10,

$$(7) \quad U : V : W = u^4 : v^4 : w^4,$$

und außerdem

$$(8) \quad U : V : W = u_i u_r : v_i v_r : w_i w_r.$$

Aus (7) folgt, daß die Größen  $U, V, W$  einer Gleichung der Form

$$(9) \quad \sqrt[4]{U} + \sqrt[4]{V} + \sqrt[4]{W} = 0,$$

oder also der (schon von Voß angegebenen) Gleichung

$$(10) \quad (U^3 + V^3 + W^3 - 2VW - 2WU - 2UV)^3 - 128 U \cdot V \cdot W \cdot (U + V + W) = 0$$

genügen müssen. Ebenso gehört zu den Voraussetzungen unserer Aufgabe, daß keine zwei der Geraden  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  einander schneiden, und daß sie keiner singulären Kongruenz 1. Ordnung 1. Klasse angehören (und demzufolge auch keiner Regelschar 2. Ordnung). Dies alles findet seinen Ausdruck in den Ungleichungen<sup>10)</sup>

$$(11) \quad U \neq 0, \quad V \neq 0, \quad W \neq 0, \quad U + V + W \neq 0,$$

oder auch nach (10) in einer einzigen Ungleichung, die uns in der irrationalen Form:

$$(12) \quad \sqrt[4]{U} + \sqrt[4]{V} + \sqrt[4]{W} \neq 0$$

schon begegnet ist (§ 10, Nr. 8).

Wir nehmen also an, daß die Gleichung (10) und die Ungleichungen (11) erfüllt sind: wir haben dann  $u : v : w$  zu berechnen nach der Vorschrift:

$$(13) \quad \boxed{\begin{array}{l} u + v + w = 0, \\ u^4 : v^4 : w^4 = U : V : W \end{array}}$$

<sup>10)</sup> Siehe Leipz. Ber. 1896, S. 202, 203.

Diese Gleichungen lassen nun, je nach Umständen, eine oder zwei Lösungen zu, und im ersten Falle kann die Lösung durch rationale Operationen gefunden werden<sup>71)</sup>.

In der That kann die Gleichung (10) gedeutet werden als die Gleichung einer ebenen irreduziblen und zwar rationalen Kurve 4. Ordnung, die drei getrennte Doppelpunkte an den Stellen

$$(14) \quad U:V:W = -4:1:1, \quad 1:-4:1, \quad 1:1:-4$$

hat. Irgend zwei der Verhältnissgrößen  $v:w$ ,  $w:u$ ,  $u:v$  bilden ein System einfachster homogener Parameter für diese Kurve; den unter (14) bezeichneten Punkten der Ebene entsprechen also je zwei solche Parametersysteme oder also zwei Wertssysteme  $u:v:w$ , nämlich im ersten der drei Fälle diese:

$$(15) \quad u:v:w = 2:-1 \pm i:-1 \mp i.$$

Es gibt also in der Regel ein Lösungspaar unserer Aufgabe, im Ausnahmefall aber ihrer zwei.

Setzen wir nun voraus, daß die einzige Lösung der Gleichungen (13) gefunden ist, oder im Ausnahmefall, daß wir uns für eine der beiden Lösungen (15) entschieden haben, so haben wir damit noch nicht den Umstand ausgenutzt, daß uns die Verhältnissgrößen  $u_l:v_l:w_l$  und  $u_r:v_r:w_r$  hier als bekannt gelten. Diese können aber aus den Verhältnissen  $U:V:W$  durch Auflösung einer quadratischen Gleichung berechnet werden. Die Wurzeln dieser Gleichung sind hier im voraus bekannt. Es findet sich:

$$(16) \quad \left. \begin{array}{l} u_l:v_l:w_l \\ u_r:v_r:w_r \end{array} \right\} = \begin{array}{lll} 2U & : & -U-V+W \mp \sqrt{\Delta} : -U+V-W \pm \sqrt{\Delta}, \\ -U-V+W \pm \Delta & : & 2V & : & U-V-W \mp \sqrt{\Delta}, \\ -U+V-W \mp \Delta & : & U-V-W \pm \sqrt{\Delta} & : & 2W \end{array}$$

wobei  $\Delta$  die Bedeutung hat:

$$(17) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & (\mathfrak{H}\mathfrak{H}) & (\mathfrak{H}\mathfrak{G}) & (\mathfrak{H}\mathfrak{D}) \\ (\mathfrak{H}\mathfrak{H}) & 0 & (\mathfrak{H}\mathfrak{G}) & (\mathfrak{H}\mathfrak{D}) \\ (\mathfrak{G}\mathfrak{H}) & (\mathfrak{G}\mathfrak{H}) & 0 & (\mathfrak{G}\mathfrak{D}) \\ (\mathfrak{D}\mathfrak{H}) & (\mathfrak{D}\mathfrak{H}) & (\mathfrak{D}\mathfrak{G}) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{H}_{02} & \mathfrak{H}_{03} & \mathfrak{H}_{21} & \mathfrak{H}_{12} \\ \mathfrak{H}_{02} & \mathfrak{H}_{03} & \mathfrak{H}_{31} & \mathfrak{H}_{10} \\ \mathfrak{G}_{02} & \mathfrak{G}_{03} & \mathfrak{G}_{31} & \mathfrak{G}_{12} \\ \mathfrak{D}_{02} & \mathfrak{D}_{03} & \mathfrak{D}_{31} & \mathfrak{D}_{12} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= U+V+W-2VW-2WU-2UV =$$

$$= \{\sqrt{U}+\sqrt{V}+\sqrt{W}\} \cdot \{\sqrt{U}-\sqrt{V}-\sqrt{W}\} \cdot \{-\sqrt{U}+\sqrt{V}+\sqrt{W}\} \cdot \{-\sqrt{U}-\sqrt{V}-\sqrt{W}\}.^{72)}$$

Unter Benutzung der Gleichungen (8) erhält man hieraus

$$(18) \quad U:V:W:\sqrt{\Delta} = u_l u_r : v_l v_r : w_l w_r : \nabla,$$

<sup>71)</sup> Um hier den Gedankengang nicht zu unterbrechen, wird die wirkliche Ermittlung der Verhältnissgrößen  $u:v:w$  erst später dargelegt (S. 303).

<sup>72)</sup> Leipz. Ber. 1896. Im singulären Fall  $U:V:W = -4:1:1$  ergibt sich, nach bestimmter Entscheidung über den (z. B. positiv anzunehmenden) Wert der Wurzelgröße  $\sqrt{2}$ ,

$$u_l : v_l : w_l = -2 \pm \sqrt{2} : 1 \mp \sqrt{2},$$

$$u_r : v_r : w_r = -2 \mp \sqrt{2} : 1 \pm \sqrt{2};$$

jeder der beiden hier zusammengefaßten Möglichkeiten entsprechen dann noch die beiden unter (15) angegebenen Wertssysteme von  $u:v:w$ .

wo

$$(19) \quad \nabla = \begin{vmatrix} v_l & w_l \\ v_r & w_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_l & u_l \\ w_r & u_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_l & v_l \\ u_r & v_r \end{vmatrix};$$

nach (13) folgt dann, für einen der zwei Wurzelwerte,

$$(20) \quad u^4 : v^4 : w^4 : 4uvw \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}} = u_l u_r : v_l v_r : w_l w_r : \nabla.$$

Nachdem über die Werte der Größen  $u, v, w$  entschieden ist, läßt sich somit die Wurzelgröße  $\sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}}$  rational, also eindeutig erklären.

Nunmehr sind wir in der Lage, zwei im vorgeschriebenen Komplex gelegene Kurve 3. Ordnung anzugeben, die zu den zu suchenden durch Transformationen der Gruppe  $\Gamma_3$  äquivalent sind. Nach Satz XIII nämlich muß eine solche Kurve in der Form (1) darstellbar sein. Daher kann man noch die Punkte  $a, b, c, d$  dem Punkte  $t = \infty$  und den Wurzelpunkten  $t = e_1, e_2, e_3$  der Gleichung (2) zuordnen. Nach Ausführung dieser Zuordnung ist die transformierte Kurve — bei Annahme der oberen Vorzeichen — samt ihrer Parameterverteilung völlig bestimmt; es muß sich also der Wert der Konstanten  $C$  eindeutig bestimmen lassen.

In der Tat gelingt es nun, die Wurzelgrößen  $e_1, e_2, e_3$  und mit ihnen den Wert von  $C$  rational zu bestimmen.

Wir bezeichnen die Punkte der Kurve (1) durch die zugehörigen Werte von  $t$ , die Punkte auf den beiden Leitlinien durch die entsprechenden Werte der Quotienten

$$l = \frac{l_2}{l_1}, \quad r = \frac{r_2}{r_1}.$$

Wir haben dann gleichzeitig (z. B.):

$$(21) \quad t_a = \infty, \quad t_b = e_1, \quad t_c = e_2, \quad t_d = e_3,$$

$$l_a = \infty, \quad l_b = 3e_1(e_1 - 1), \quad (\text{usf.}),$$

$$(22) \quad r_a = \infty, \quad r_b = 3e_1(e_1 + 1), \quad (\text{usf.}),$$

also etwa

$$u = e_3 - e_2, \quad v = e_3 - e_1, \quad w = e_1 - e_2,$$

$$u_l = -3(e_2 - e_3)(e_1 + 1), \quad (\text{usf.}),$$

$$w_r = -3(e_2 - e_3)(e_1 - 1),$$

folglich, da hier  $e_1^2 - 1 = -\frac{1}{3}(e_2 - e_3)^2$  ist,

$$u_l w_r = -3(e_2 - e_3)^2 \quad (\text{usf.}),$$

$$\nabla = -18(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2),$$

und daraus nach Nr. (20)

$$(23) \quad \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Die Benutzung dieses Wurzelwertes liefert nun die Werte von  $e_1, e_2, e_3$ ,

$$(24) \quad e_1 = -\frac{1}{2} \frac{v - w}{\sqrt{\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}}} \quad (\text{usf.}),$$

wobei der Wert der Wurzelgröße durch die Gleichung (20) *eindeutig* bestimmt ist. Damit haben wir auch den Wert der absoluten Invariante  $C$ , die bei beliebiger Vertauschung der Punkte  $a, b, c, d$  ungeändert bleibt:

$$(25) \quad C = 4e_1 e_2 e_3 = - \frac{(v-w)(w-u)(u-v)}{(u^2+v^2+w^2) \sqrt{\frac{u^2+v^2+w^2}{2}}}$$

Hiermit dürfen wir die gestellte Aufgabe als im wesentlichen gelöst betrachten. Es ist eine Figur gefunden, die zu den zu suchenden Figuren kollinear ist, und zwar, bei gegebenem Komplex, vermöge gewisser Transformationen der Gruppe  $\Gamma_6$ . Die Herstellung geschlossener Endformeln mit Hilfe dieser Transformationen ist elementar, aber kaum lohnend.

Natürlich kann das vorgelegte Problem auch in der Weise angegriffen werden, daß man von vornherein die Punktquadrupel auf den Leitlinien in gegebene Lagen bringt, und dann die zugehörigen Kurven zu bestimmen sucht. Auch das führt zu einer interessanten algebraischen Entwicklung. Nehmen wir also jetzt an, daß die Punkte  $a_i$  usw. die besonderen Lagen haben, die den Werten (Abszissen)

$$(26) \quad \begin{aligned} l_a = \infty, \quad l_b = 0, \quad l_c = 1, \quad l_d = L = -\frac{v_l}{w_l}, \\ r_a = \infty, \quad r_b = 0, \quad r_c = 1, \quad r_d = R = -\frac{v_r}{w_r} \end{aligned}$$

entsprechen, und wählen wir den Kurvenparameter  $s$  nunmehr so, daß

$$(27) \quad s_a = \infty, \quad s_b = 0, \quad s_c = 1, \quad s_d = D = -\frac{v}{w}$$

wird!

Die Gleichung (10) geht jetzt über in

$$(28) \quad (L-R)^4 - 128 \cdot L \cdot R \cdot (1-L) \cdot (1-R) \cdot \{1 + (1-L)(1-R) + LR\} = 0.$$

Alle Werte der Doppelverhältnisse oder Abszissen  $L$  und  $R$ , und nur solche, werden brauchbar sein, für die nicht  $L = R$  wird. Die Aufgabe der Bestimmung von  $u:v:w$  wird jetzt gleichbedeutend mit der Forderung, den Wert von  $D$  aus den beiden nach (28) miteinander verträglichen Gleichungen

$$(29) \quad LR = D^4, \quad (1-L)(1-R) = (1-D)^4$$

zu berechnen. Ähnlich wie zuvor nehmen wir zunächst an, daß das schon geleistet ist, und daß man sich im singulären Fall für einen bestimmten Wert von  $D$  entschieden hat. Erklärt man dann noch (was statthaft ist), daß

$$\sqrt{\frac{u^2+v^2+w^2}{2}} = w \sqrt{1-D+D^2}$$

sein soll, so ist auch die letzte Wurzelgröße rational bekannt und *eindeutig* bestimmt.

$$(30) \quad \sqrt{1-D+D^2} = \frac{L-R}{4D(1-D)},$$

so daß die Abhängigkeit zwischen  $L$ ,  $R$  und  $D$  auch durch die Gleichungen

$$(31) \quad \frac{L}{R} \Big\} = D \{ 2 - 3D + 2D^2 \} \mp D(1-D)\sqrt{1-D+D^2}$$

ausgedrückt werden kann, während

$$(32) \quad C = - \frac{(1+D)(2-D)(1-2D)}{2(1-D+D^2)\sqrt{1-D+D^2}}$$

folgt.

Man kann nun ohne sonderliche Schwierigkeit — z. B. durch Transformation der Formeln (1) — zu Kurven 3. Ordnung gelangen, die im vorgeschriebenen Komplex liegen und, entsprechend den Werten  $s = \infty, 0, 1$ , drei der vier vorgeschriebenen Tangenten haben. Wir erhalten sie durch Spezialisierung des Gleichungssystems

$$(33) \quad \begin{cases} \xi_0 = l_1(s) = \sqrt{q} \{ (1+p) - 2ps \}, \\ \xi_1 = l_2(s) = \sqrt{q} \{ (3-p)s^2 - 2s^3 \}, \\ \xi_2 = r_1(s) = \sqrt{p} \{ (1+q) - 2qs \}, \\ \xi_3 = r_2(s) = \sqrt{p} \{ (3-q)s^2 - 2s^3 \}. \end{cases}$$

Aus (33) folgt nämlich

$$\begin{aligned} (ll') &= -8pq \cdot s \cdot (s-1) \cdot \left\{ s - \frac{(1+p)(3-p)}{4p} \right\}, \\ (rr') &= -8pq \cdot s \cdot (s-1) \cdot \left\{ s - \frac{(1+q)(3-q)}{4q} \right\}; \end{aligned}$$

man erhält daher eine der gesuchten Kurven, wenn man

$$(34) \quad \boxed{pq = -3, \quad p \neq q}$$

annimmt. Außer den so schon ausgeschlossenen Wertepaaren  $(p, q) = (\pm\sqrt{-3}, \pm\sqrt{-3})$  sind aber hier noch die Paare  $(1, -3)$ ,  $(-3, 1)$  und  $(-1, 3)$ ,  $(3, -1)$  auszuschließen, wenn die durch (33) dargestellte Kurve vier *getrennte* ausgezeichnete Tangenten haben soll.

Wir finden nunmehr

$$(35) \quad \begin{aligned} D &= -\frac{1+p}{2} \cdot \frac{1+q}{2}, & 1-D &= -\frac{1-p}{2} \cdot \frac{1-q}{2}, \\ L &= -\frac{1+p}{2} \cdot \left(\frac{1+q}{2}\right)^2, & 1-L &= -\frac{1-p}{2} \cdot \left(\frac{1-q}{2}\right)^2, \\ R &= -\left(\frac{1+p}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+q}{2}, & 1-R &= -\left(\frac{1-p}{2}\right)^2 \cdot \frac{1-q}{2}. \end{aligned}$$

und damit

$$(36) \quad (ll') = (rr') = 24s(s-1)(s-D),$$

ferner

$$(37) \quad L-R = -(p-q) \cdot \frac{1+p}{2} \cdot \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1+q}{2} \cdot \frac{1-q}{2} \quad \left\{ \neq 0 \right\},$$

$$(38) \quad C = \frac{(p+q+6)(p+q-6)(p+q)}{(p-q)^3}.$$

Da auch  $L+R$  bekannt ist, so kann man  $p$  und  $q$  durch  $L$ ,  $R$  und  $D$ , oder also auch durch  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $\sqrt{\frac{u^2+v^2+w^2}{2}}$  rational ausdrücken:

$$(39) \quad \left. \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} = 1 - 2D \pm 2 \sqrt{1-D+D^2} = \frac{1}{w} \left\{ v-u \pm 2 \sqrt{\frac{u^2+v^2+w^2}{2}} \right\}$$

(vgl. Nr. 20, 32).

Zu beantworten bleibt schließlich noch die vorhin zurückgeschobene Frage nach der Auflösung der Gleichungen (18), oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Gleichungen (29).

Man erhält die sich zyklisch wiederholenden Gleichungen

$$\begin{array}{lllll} 0) & (L+R) & -4D & +6D^2 & -4D^3 & = 0, \\ 1) & -4LR & +(L+R) \cdot D & -4D^3 & +6D^2 & = 0, \\ 2) & 6LR & -4LR \cdot D & +(L+R) \cdot D^2 & -4D^3 & = 0, \\ 3) & -4LR & +6LR \cdot D & -4LR \cdot D^2 & +(L+R) \cdot D^3 & = 0, \\ 0) & (L+R) & -4D & +6D^2 & -4D^3 & = 0, \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Setzt man nun

$$(40) \quad \begin{aligned} A &= -4 \{ (L+R)^2 + 4LR + 16(1+LR) - 12(L+R) \}, \\ B &= -2 \{ 3(L+R)^2 - 12LR - 8(L+R)(1+LR) \}, \\ \Gamma &= -4 \{ (L+R)^2 + 4LR + 16LR(1+LR) - 12LR(L+R) \}, \\ \Omega &= \{ (L+R)^3 + 96LR(1+LR) - 68LR(L+R) \}, \end{aligned}$$

so werden die dreireihigen Unterdeterminanten der Determinante der Gleichungen 0) ... 3) diese:

$$\begin{array}{cccc} \Omega, & LR \cdot A, & LR \cdot B, & LR \cdot \Gamma, \\ \Gamma, & \Omega, & LR \cdot A, & LR \cdot B, \\ B, & \Gamma, & \Omega, & LR \cdot A, \\ A, & B, & \Gamma, & \Omega. \end{array}$$

Die Determinante selbst hat den Wert Null zufolge der Gleichung (28), die hier in der Form

$$(L+R)\Omega + LR(4A + 6B + 4\Gamma) = 0$$

erscheint. Für  $D$  aber ergeben sich, wenn nicht  $A, B, \Gamma, \Omega$  alle den Wert Null haben, die Ausdrücke

$$(41) \quad D = -\frac{B}{A} = -\frac{\Gamma}{B} = -\frac{\Omega}{\Gamma} = -\frac{LRA}{\Omega},$$

deren Vergleichung nochmals die Gleichung (28) liefert.

Um zu erkennen, wie im Ausnahmefall  $D$  zu berechnen ist, führen wir in die Ausdrücke (40)  $D$  als unabhängige Veränderliche ein. Wir finden dann, wenn

$$(42) \quad \Theta = \frac{1}{32}(1+D^2)(1-2D+2D^2)(2-2D+D^2)$$

gesetzt wird,

$$A = -\Theta, \quad B = D \cdot \Theta, \quad \Gamma = -D^2 \cdot \Theta, \quad \Omega = D^3 \cdot \Theta.$$



Die durchweg imaginären Wurzeln der reduzierten Gleichung  $\Theta = 0$  liefern also die Werte von  $D$ , die nicht nach der Regel (41) gefunden werden können, und die Formeln (32) geben dann die singulären Paare  $(L, R)$ , deren jedem zwei Werte von  $D$  entsprechen<sup>79)</sup>.

### Figuren der Familien b), c).

Von Kurven dritter Ordnung der  $\infty^6$  Individuen umfassenden Familie b) haben wir zwei Arten zu unterscheiden, je nachdem der Berührungspunkt der doppelt zählenden Tangente auf der linken oder auf der rechten Leitlinie der absoluten Kongruenz liegt. Die Kurven jeder Art bilden für sich eine Klasse gegenüber der Gruppe  $\Gamma_6$ ; die der ersten Klasse sind alle äquivalent mit jeder der beiden Kurven

$$(44) \quad \begin{aligned} \xi_0 &= l_1(s) = 1, \\ \xi_1 &= l_4(s) = 3t^2 - 2t^3, \\ \xi_2 &= r_1(s) = \sqrt{-3}(1-2t), \\ \xi_3 &= r_2(s) = -\sqrt{-3} \cdot t^2, \end{aligned}$$

deren ausgezeichnete Tangenten ( $t = \infty, 0, 1$ ) dieselbe Lage haben wie die drei ersten Tangenten in den Formeln (33), und bei denen die doppelt zählende Tangente dem uneigentlichen Werte  $t = \infty$  entspricht. Äquivalent mit den Kurven (44) und daher ebenfalls als Klassenrepräsentanten brauchbar sind die Kurven, die von den Formeln (1) im Grenzfall  $C = -1$  geliefert werden.

Die Kurven 3. Ordnung der Familie c) endlich bilden wiederum zwei Klassen, deren eine die Kurve

$$(45) \quad \xi_0 = 1, \quad \xi_1 = t^2, \quad \xi_2 = 3t, \quad \xi_3 = t^2$$

zum Repräsentanten hat oder haben kann.

### Besonderheiten reeller Figuren.

Durch das Vorgetragene ist noch nicht die Frage beantwortet, unter welchen Umständen z. B. vier verschiedene reelle Geraden  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  im Komplex  $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$  gelegene reelle Berührungskurven 3. Ordnung zulassen. Unter der gleichen Voraussetzung der Realität der vier „passend“ gewählten Geraden liefern die Formeln (1) ein Paar reeller Kurven, die Formeln (33) aber nicht; es bleibt also aufzuklären, woran das liegt.

Die zuletzt genannte Erscheinung gehört zu einer Gruppe von Tatsachen, die trotz vieler Untersuchungen über die projektive Geometrie, namentlich auch reeller Figuren, bis vor kurzem nur sehr unvollkommen, ja größtenteils überhaupt nicht bekannt geworden sind<sup>80)</sup>.

Jeder nicht-singuläre reelle lineare Komplex in dem Büschel durch die absolute Kongruenz (durch irgendeine lineare Kongruenz mit reellen Leitlinien) vermittelt eine

<sup>79)</sup> Entsprechend der Annahme in der Anmerkung auf Seite 302 erhält man die Werte

$$\begin{aligned} D &= \pm i, \quad L = 3 - 2\sqrt{2}, \quad R = 3 + 2\sqrt{2}, \\ p &= (1 + \sqrt{2})(1 \mp \sqrt{2}i), \quad q = (1 - \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2}i), \end{aligned}$$

und zwar dieselben beiden Werte von  $D$  für jeden der beiden Werte von  $\sqrt{2}$ .

<sup>80)</sup> Siehe die Abhandlung: *Die Begriffe Links und Rechts, Windungssinn und Drehungssinn*. Archiv für Mathematik (3) 21 (1913), S. 193 u. ff.

*Zuordnung eines sogenannten Umlaufsinnes der einen Leitlinie zu einem bestimmten Umlaufsinne der anderen.*

Irgendeine reelle Gerade im Komplex, die keine der nunmehr als *reell* voraussetzenden Leitlinien der Kongruenz trifft, z. B. die Trägerin der Punktreihe

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sigma : \tau : \sigma : \tau,$$

bestimmt nämlich eine sie und beide Leitlinien betreffende Regelschar, und dadurch eine reell-projektive Beziehung der Leitlinien, in Beispiel  $l_1 : l_2 = r_1 : r_2$ . Durch diese projektive Beziehung wird nun die im Satze genannte Zuordnung hergestellt: Sie ist *unabhängig von der Auswahl der zur Konstruktion benutzten Komplexgeraden*.

Drei verschiedene reelle Punkte  $a_l, b_l, c_l$  auf der linken Leitlinie und drei ebensolche und entsprechend geordnete  $a_r, b_r, c_r$  auf der rechten können demnach ohne Mehrdeutigkeit als *gleichsinnig* oder *ungleichsinnig* bezeichnet werden. Da nun zufolge der Gleichungen (35) die durch  $L$  und  $R$  bestimmten Punkte  $d_l$  und  $d_r$  in entsprechenden Intervallen zwischen den zuerst genannten Punkten liegen, so sind auch noch die Figuren  $a_l, b_l, c_l, d_l$  und  $a_r, b_r, c_r, d_r$  „gleichsinnig“ oder „ungleichsinnig“: Je zwei entsprechende aus ihnen entnommene Tripel haben immer dieselbe von beiden Eigenschaften. Durch *reelle* Transformationen der Gruppe  $G_6$  aber — die als lineare Transformationen von  $l_1, l_2$  und  $r_1, r_2$  gleiche Determinanten haben — kann man gleichsinnige oder ungleichsinnige Figuren nur wieder in ebensolche überführen.

Eine leichte Rechnung zeigt, daß im Falle der Gleichungen (1) ungleichsinnige, in dem der Gleichungen (33) gleichsinnige Punktquadrupel auf den Leitlinien vorliegen<sup>21)</sup>. Es folgt:

*In jedem reellen Komplex*

$$\sigma \bar{x}_{01} + \tau \bar{x}_{23} = 0, \quad \sigma \tau < 0$$

haben die reellen Geraden  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  (unter den genannten Voraussetzungen) zwei reelle oder zwei konjugiert-imaginäre Berührungskurven 3. Ordnung, je nachdem die Punktfiguren  $a_l, b_l, c_l, d_l$  und  $a_r, b_r, c_r, d_r$  ungleichsinnig oder gleichsinnig sind.

Umgekehrt verhalten sich dann die reellen Komplexe des betrachteten Büschels, für die  $\sigma \tau > 0$  ist. Das heißt, sind die beiden gegebenen Punktfiguren gleichsinnig in bezug auf den einen Komplex, so sind sie ungleichsinnig in bezug auf den anderen. Zwei der genannten Figuren aber sind in bezug auf den ersten Komplex gleichsinnig oder ungleichsinnig, je nachdem bei Darstellung z. B. der mit  $a, b, c$  bezeichneten Punkte durch *reelle* lineare Formen die Invariantenprodukte

$$(l_3 l_1)(l_1 l_2)(l_2 l_3) \quad \text{und} \quad (r_3 r_1)(r_1 r_2)(r_2 r_3)$$

gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Die in Rede stehende Unterscheidung entspricht genau der Unterscheidung zweier Arten von reellen Tangenten der Fläche  $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$  (§ 1, S. 49): Sowohl die reellen als auch die bezeichneten konjugiert-imaginären Kurven 3. Ordnung in unserem Komplex sind Bilder *reeller* Kurven 4. Klasse auf der Fläche 2. Ordnung.

Durch die beschriebenen Figuren  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  werden alle Klassen von reell-kollinearen Quadrupeln reeller Geraden erschöpft, die überhaupt reelle und irreduzible unebene Berührungskurven 3. Ordnung zulassen.

<sup>21)</sup> Man beachte, daß die Wurzeln der Gleichung (2), falls sie reell sind, den Ungleichungen  $-1 \leq e_1, e_2, e_3 \leq 1$  genügen, wobei noch im Falle a) die Gleichheitszeichen ausgeschlossen sind.

Gehören nämlich vier reelle Geraden, deren Kollineationsinvarianten  $U, V, W$  den Ungleichungen (11) genügen, einer Kongruenz 1. Ordnung 1. Klasse mit konjugiert-imaginären Leitlinien an, so wird die mit  $\Delta$  bezeichnete Größe negativ und daher schon der Wurf  $a, b, c, d$  imaginär. Ist aber  $U + V + W = 0$ , so liegt der äquianharmonische Fall vor  $\left\{ D = \frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}, L = R = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right\}$ , dem ebenfalls nicht vier reelle Geraden entsprechen können. Jeder nicht-singuläre lineare Komplex, der die Kongruenz enthält, enthält in diesem von unserer Untersuchung ausgeschlossenen Grenzfall eine solche Berührungskurve zu den Geraden  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ .

Aus dem über reelle Geraden  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  Vorgetragenen lassen sich schließlich noch einige weitere Folgerungen ziehen.

Die reellen nicht-singulären Komplexe des Büschels  $\sigma \Xi_{01} + \tau \Xi_{23} = 0$  können als solche von positiver oder negativer *Signatur* unterschieden werden, je nachdem  $\sigma\tau > 0$  oder  $\sigma\tau < 0$  ist. Die entgegengesetzte „Signatur“ haben dann die im Komplex gelegenen reellen Kurvenzüge. Also haben die im Komplex  $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$  gelegenen Raumkurven 3. Ordnung mit reellem Zug die positive Signatur  $\{(xx'x''x''') > 0\}$ . Ferner gehören die reellen Kollineationen der Gruppe  $\Gamma_0$  sämtlich zu denen mit positiver „Signatur“, es sind „positive“ Kollineationen<sup>22)</sup>. Unter ihnen gibt es aber wieder zweierlei Transformationen, die durch eine „Signatur“ anderer Art unterschieden werden können, nämlich durch das gemeinsame Vorzeichen der einander gleichen Transformationsdeterminanten von  $l_1, l_2$  und  $r_1, r_2$ . Die einem positiven Wert dieser Determinanten entsprechenden (*sit venia verbo*) „eigentlich“-positiven reellen Transformationen von  $\Gamma_0$  bilden für sich eine Gruppe und (gleich den anderen) ein Kontinuum: Die reellen Transformationen von  $\Gamma_0$  umfassen zwei Kontinua  $\Gamma'_0, H'_0$  von Transformationen.

Es verdient nun m. E. im Hinblick hierauf eine Tatsache beachtet zu werden, die allerdings in dem Vorgetragenen implizite schon enthalten ist: Unsere reellen Kurven 3. Ordnung und die zu ihnen gehörigen Quadrupel von vier reellen Geraden  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  bilden nicht etwa ebenfalls zwei Kontinua, sondern nur ein einziges. Man begründet ohne Mühe den noch etwas inhaltsreicheren Lehrsatz:

*Sind zwei im Komplex  $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$  gelegene reelle Kurvenzüge 3. Ordnung des Typus (a) miteinander äquivalent vermöge reeller Transformationen der Gruppe  $\Gamma_0$ , so sind von den vier Paaren inverser Transformationen, die (nach Satz XIII) die Zuordnung beider Kurven bewirken, zwei eigentlich- und zwei uneigentlich-positiv.*

## 12. Oskulierende Vereine und Elemente höherer Ordnung.

Nachdem wir in den §§ 9 bis 11 die Grundlagen der entwickelten Theorie durch einige umfangreichere Anwendungen auf spezielle Probleme erläutert haben, wenden wir uns nochmals zu diesen Grundlagen selbst.

Die Zuordnung unserer orientierten Elemente auf einer Fläche 2. Ordnung zu Punkten eines projektiven Punktkontinuums  $\{\xi\}$  ist nur die erste in einer unendlichen Folge untereinander verwandter Zuordnungen oder Abbildungen, von denen wir hier wenigstens noch die zweite kurz betrachten wollen.

<sup>22)</sup> Siehe die zitierte Abhandlung über Links und Rechts, S. 202.

Haben wir zwei orientierte Vereine auf der Fläche 2. Ordnung, die einander im erklärten Sinne berühren, so wird durch die Zuordnung der orientierten Elemente zu Punkten  $\xi$  diese *Berührung* auf eine einfachere Lagenbeziehung, nämlich auf ein *Schneiden* der Bilder der beiden Vereine reduziert, das natürlich in besonderen Fällen wieder eine Berührung einschließen kann. Eine Berührung der Bilder der beiden Vereine, d. i. Gemeinsamkeit auch der Tangenten gemeinsamer Punkte, kann nun schon an regulären Stellen der beiden Bildkurven eintreten, und es entsteht dann die Frage, ob man nicht durch eine weitere Abbildung auch diese Berührung wieder auf ein Schneiden dann herzustellender neuer Bildkurven zurückführen kann. Wie sich das in sachgemäßer Weise ausführen läßt, soll nun gezeigt werden. Um nicht sogleich in Verwickelungen zu geraten, beschränken wir uns in der Hauptsache auf die Betrachtung *regulärer* Stellen der Bildkurven  $\xi(t)$ .

Haben die Bilder zweier orientierter Vereine in einem gemeinsamen Punkt auch die Tangente gemein, so sagen wir, daß diese Vereine einander *oskulieren*. Jeder Verein wird nach dieser Definition in jedem seiner Elemente von einem bestimmten zyklischen Verein oskuliert, und dieser zyklische Verein ist derselbe für alle an derselben Stelle  $\xi$  einander oskulierenden Vereine. Die Figur eines orientierten Elementes, samt einem hindurchgehenden zyklischen Verein, oder die Figur eines Punktes  $\xi$  samt einer hindurchgehenden Geraden  $\Xi$  des Komplexes

$$(1) \quad \Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$$

tritt demnach hier als eine weitere selbständige Grundfigur auf, die wir, in bezug auf den Bildraum, als *Linielement im Komplex* (1) bezeichnen können (*Lie*), in ihrem Verhältnis zum orientierten Element (*Element* 1. Ordnung) aber als *orientiertes Element* 2. Ordnung hinstellen dürfen. Gleich den Elementen 1. Ordnung können dann diese Elemente 2. Ordnung durch Koordinaten dargestellt werden, nämlich durch die Verhältnißgrößen  $\xi$  und durch die zur Geraden des Elementes 2. Ordnung gehörigen ebenfalls homogenen Linienkoordinaten. Diese letzten reduzieren sich, zufolge von (1), auf ihrer fünf, die wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$(2) \quad \begin{array}{lll} x_0 = \Xi_{01}, & x_1 = \Xi_{02}, & x_2 = \Xi_{03}, \\ x_3 = \Xi_{23}, & x_4 = \Xi_{31}, & x_5 = \Xi_{12}. \end{array}$$

Es bestehen dann die folgenden Gleichungen, die zusammen die genannten 4 + 5 Größen erschöpfend als Koordinaten eines Elementes 2. Ordnung charakterisieren:

$$(3) \quad x_0^2 + x_1 x_2 + x_2 x_4 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & * \quad \xi_1 \mathfrak{X}_0 + \xi_2 \mathfrak{X}_3 + \xi_3 \mathfrak{X}_4 = 0, \\
 & -\xi_0 \mathfrak{X}_0 \quad * + \xi_2 \mathfrak{X}_2 - \xi_3 \mathfrak{X}_1 = 0, \\
 & -\xi_0 \mathfrak{X}_3 - \xi_1 \mathfrak{X}_2 \quad * + \xi_3 \mathfrak{X}_0 = 0, \\
 & -\xi_0 \mathfrak{X}_4 + \xi_1 \mathfrak{X}_1 - \xi_2 \mathfrak{X}_0 \quad * = 0;
 \end{aligned}$$

jedem der  $\infty^4$  (eigentlich  $\infty^{3.4}$ ) Elemente zweiter Ordnung entspricht ein und (im wesentlichen) nur ein System von Koordinaten  $(\xi_i; \mathfrak{X}_k)$ . Die Verhältnisse der Größen  $\xi_i$  und die der Größen  $\mathfrak{X}_k$  — auf die allein es ankommt — werden sich aber auch schon aus den Produkten  $\xi_i \mathfrak{X}_k$  bestimmen lassen; und da nach (4) die Produkte  $\xi_i \mathfrak{X}_0$  durch andere jener Produkte linear-ausdrückbar sind, so genügen dazu auch schon die sechzehn Produkte

$$(5) \quad \xi_i \mathfrak{X}_k = \mathfrak{Z}_{ik} \quad (i = 0, 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4),$$

oder vielmehr ihre Verhältnisse, die wir als Koordinaten eines Punktes in einem Gebiete 16. Stufe, oder in einem Raume von 15 (komplexen) Dimensionen ansehen werden. Wir erhalten also in diesem Raume  $R_{15}$  eine Mannigfaltigkeit  $M_4$  von vier (komplexen) Dimensionen, deren Punkte ausnahmslos eindeutig-umkehrbar (birational) und also überall stetig den Elementen 2. Ordnung zugeordnet sind.

Die hiermit hergestellte Abbildung läßt sich in ähnlicher Weise beschreiben, wie die Abbildung der Elemente 1. Ordnung auf die Punkte  $\xi$ . Da aber der Sachverhalt natürlich hier schon viel verwickelter ist, so begnügen wir uns damit, einige Tatsachen festzustellen, die besonders bemerkenswert scheinen.

*Die Mannigfaltigkeit  $M_4$ , deren Punkte den orientierten Elementen 2. Ordnung zugeordnet sind, läßt sich erschöpfend durch ein System von 44 linear-unabhängigen quadratischen Gleichungen zwischen den 16 homogenen Größen  $\mathfrak{Z}_{ik}$  erklären.*

Man wird diese Gleichungen ohne weiteres aus den Gleichungen (5) und (3, 4) ableiten.

*Die Punkte von  $M_4$  können auf zwei Arten auf  $\infty^3$  gerade Linien verteilt werden. Jede Gerade aus der einen dieser Mannigfaltigkeiten entspricht einem bestimmten orientierten Element 1. Ordnung, jede Gerade aus der anderen einem bestimmten zyklischen Verein.*

Ferner:

*Die Mannigfaltigkeit  $M_4$  bleibt in Ruhe bei einer Gruppe von Kollineationen des Raumes  $R_{15}$ , die holomorph ist zur Gruppe  $\Gamma_{10}$  (und bei keinen weiteren Kollineationen).*

Diese Gruppe ist für  $M_4$  transitiv im strengen Sinne des Wortes, d. h. jeder Punkt von  $M_4$  ist mit jedem anderen äquivalent.  $M_4$  ist frei von Singularitäten.

Endlich:

*Die Ordnung der Mannigfaltigkeit  $M_4$  ist 24.*

Das heißt: Vier lineare Gleichungen zwischen den Verhältnisgrößen  $\mathfrak{Z}_{ik}$ , die den erwähnten quadratischen Gleichungen genügen, werden, wenn sie linear-unabhängig und auch sonst nicht zu speziell gewählt sind, durch vierundzwanzig wesentlich verschiedene Wertsysteme dieser Größen befriedigt. Dies ist nämlich die Zahl der Lösungen, die sich in einem passend gewählten Spezialfall findet, in dem die Lösungszahl endlich bleibt und die Lösungen selbst auch alle voneinander verschieden bleiben<sup>88)</sup>. Man gestalte die einzelne lineare Gleichung so, daß sie befriedigt wird erstens durch alle Elemente 2. Ordnung, deren Punkte in einer gegebenen Ebene liegen, zweitens durch alle, deren Geraden eine gegebene Sekante haben. Man erhält dann, bei geeigneter Lage der gegebenen Ebenen und Geraden,  $4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1$  Lösungen, deren keine mehrfach zählt.

Wir erklären jetzt als *Verein orientierter Elemente 2. Ordnung* den Inbegriff aller solcher Elemente, die zu den verschiedenen Stellen eines Vereins orientierter Elemente 1. Ordnung gehören. Es gilt dann der Satz:

*XV. Bild eines Vereins orientierter Elemente 2. Ordnung ist auf der Mannigfaltigkeit  $M_4$  eine analytische Kurve, deren Tangente an jeder Stelle  $\mathfrak{Z}$  die charakteristische Eigenschaft hat, die Ebene zu berühren, die die beiden durch  $\mathfrak{Z}$  gehenden und auf  $M_4$  verlaufenden geraden Linien verbindet.*

Damit nämlich eine analytische Kurve auf  $M_4$  die zuletzt verlangte Eigenschaft habe, ist notwendig und hinreichend, daß das einer Fortschreitung auf der Kurve entsprechende System von Differentialen  $\delta \mathfrak{Z}_{ik}$  sich als lineare Kombination solcher spezieller Differentiale  $\delta_1 \mathfrak{Z}_{ik}$  und  $\delta_2 \mathfrak{Z}_{ik}$  darstellen lasse, die Fortschreitungen auf den zwei durch  $\mathfrak{Z}$  gehenden geraden Linien entsprechen; und zwar genügt, bei passender Wahl der Zuwächse  $\delta_1 \mathfrak{Z}_{ik}$  und  $\delta_2 \mathfrak{Z}_{ik}$  schon die Summe  $\delta \mathfrak{Z}_{ik} = \delta_1 \mathfrak{Z}_{ik} + \delta_2 \mathfrak{Z}_{ik}$ . Solche spezielle Fortschreitungen werden gefunden, wenn man einmal in den Gleichungen (4) die Größen  $\xi_i$  durch  $\delta_1 \xi_i$  ersetzt, und dafür sorgt, daß die Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \delta_1 \xi_0 & \delta_1 \xi_1 & \delta_1 \xi_2 & \delta_1 \xi_3 \end{vmatrix}$$

nicht den Rang Eins erhält, und das andere Mal in (4) an Stelle der Größen  $\xi_k$  die Differentiale  $\delta_2 \xi_k$  schreibt, mit derselben Bedingung wie zuvor für die Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \delta_2 \xi_1 & \delta_2 \xi_2 & \delta_2 \xi_3 & \delta_2 \xi_4 \end{vmatrix}.$$

<sup>88)</sup> Der Schluß vom Spezialfall auf den allgemeinen Fall ist hier möglich, weil  $M_4$  singularitätenfrei ist.

Für die kombinierte Fortschreitung von  $\mathfrak{Z}_{ik}$  zu

$$\mathfrak{Z}_{ik} + \delta \mathfrak{Z}_{ik} = \mathfrak{Z}_{ik} + \delta_1 \mathfrak{Z}_{ik} + \delta_2 \mathfrak{Z}_{ik}$$

oder von  $\xi_i$  zu  $\xi_i + \delta \xi_i$  und  $\mathfrak{X}_k$  zu  $\mathfrak{X}_k + \delta \mathfrak{X}_k$  müssen dann dieselben den Gleichungen (4) zu entnehmenden Bedingungen bestehen, und außerdem dürfen die beiden Matrices

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \delta \xi_0 & \delta \xi_1 & \delta \xi_2 & \delta \xi_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 & \mathfrak{X}_4 \\ \delta \mathfrak{X}_1 & \delta \mathfrak{X}_2 & \delta \mathfrak{X}_3 & \delta \mathfrak{X}_4 \end{vmatrix}$$

nicht beide den Rang Eins haben. Auf genau dieselben Forderungen wird man nun geführt, wenn man zusieht, wie im Bildraume  $\{\xi\}$  das dort vorhandene Bild  $(\xi; \Xi)$  eines Elementes 2. Ordnung sich ändert, wenn man zu einem benachbarten Elemente  $(\xi + d\xi; \Xi + d\Xi)$  übergeht, das dem Bilde desselben Vereins von Elementen 1. Ordnung angehört, wie das erste Element 2. Ordnung<sup>84)</sup>.

Die Zuordnung von  $\mathfrak{Z}$  zu einer durch  $\mathfrak{Z}$  gehenden Ebene, oder vielmehr von  $\mathfrak{Z}$  zu Nachbarstellen in dieser Ebene, oder also von  $\mathfrak{Z}$  zu einem ebenen Büschel von Fortschreitungen auf  $M_4$  nennt man ein Pfaffsches System (ein System von Pfaffschen Gleichungen).

*Die Bilder eines Vereins von orientierten Elementen 2. Ordnung auf  $M_4$  sind also die Integralkurven eines Pfaffschen Systems.*

*Die Integralkurven dieses Pfaffschen Systems lassen sich mithin sämtlich ohne Integration, durch explizite Formeln bestimmen.* Abgesehen von den zu ihnen gehörigen Geraden der ersten Art, die den orientierten Elementen 1. Ordnung auf der Fläche 2. Ordnung entsprechen, sind sie den mit Hilfe von Quadratwurzeln zu ermittelnden orientierten Vereinen auf der Fläche 2. Ordnung eindeutig-umkehrbar zugeordnet.

Evident ist, daß analytischen Kurven des Bildraumes  $\{\xi\}$ , die dem Komplex  $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$  angehören, wenn sie sich an einer bestimmten Stelle  $\xi$  schneiden, ohne sich dort zu berühren<sup>85)</sup>, verschiedene Bildpunkte  $\mathfrak{Z}$  entsprechen:

*Durch die Zuordnung  $(\xi, \Xi) \rightarrow \mathfrak{Z}$  wird einfaches Schneiden zweier Kurven, die demselben nicht-singulären linearen Komplex angehören, zerstört, eine einfache Berührung auf ein Schneiden zurückgeführt.*

<sup>84)</sup> Ich hoffe mich hier deutlich genug ausgedrückt zu haben. Es ist mir nicht unbekannt, daß einzelne Autoren ein solches Operieren mit Differentialen für nicht exakt halten, und es für nötig erachten, die dabei nur angedeuteten Grenzübergänge in jedem einzelnen Falle in Evidenz zu setzen (was natürlich gar keine Schwierigkeit bietet). Ich halte aber dieses Maß von umständlicher Deutlichkeit für überflüssig und etwas pedantisch.

<sup>85)</sup> Man beachte, daß nach unseren Definitionen das Hindurchgehen einer analytischen Kurve durch eine singuläre Stelle einer zweiten Kurve nicht als Berührung gilt, solange dort nicht auch die Tangenten beider Kurven übereinstimmen.



In ähnlicher Weise wie von Elementen erster zu solchen zweiter Ordnung kann man auch von Elementen zweiter zu solchen dritter Ordnung und von diesen zu Elementen höherer Ordnung übergehen. Dabei wird schließlich *jede* Berührung endlicher Ordnung zweier bestimmt gegebener Vereine zerstört.

Wie die Vereine von orientierten Elementen 2. Ordnung *entweder* einem Punkt und einem zugehörigen Büschel von Fortschreitungen im Bildraume  $\{\xi\}$  *oder* den Linienelementen einer Kurve im Komplex  $\bar{\varepsilon}_{n1} - \bar{\varepsilon}_{n3} = 0$ , d. i. den Linienelementen einer Integralkurve einer gewissen Pfaffschen Gleichung entsprechen, ebenso entsprechen z. B. die Vereine von Elementen 3. Ordnung *entweder* einem Punkt auf  $M_4$  nebst zugehörigem ebenem Büschel von Fortschreitungen im beschriebenen Pfaffschen System, *oder* den Linienelementen einer Integralkurve eben dieses Pfaffschen Systems. Man wird sachgemäß *zwei* Hauptarten von Vereinen orientierter Elemente 2. Ordnung, dann *drei* von Vereinen solcher Elemente 3. Ordnung zu unterscheiden haben, und so fort. Allgemein erhält man  $\infty^{n+2}$  „orientierte Elemente  $n$ -ter Ordnung“; unter den „Vereinen“ von diesen, die ähnlich zu erklären sind wie zuvor im Falle  $n = 2$ , befinden sich immer  $\infty^{n+1}$ , die nicht aus *Vereinen* von Elementen  $(n - 1)$ -ter Ordnung abzuleiten sind, sondern einzelnen *Elementen* derart (und zugehörigen Büscheln von Fortschreitungsrichtungen) entsprechen.

Der ganze Sachverhalt ist ähnlich dem, der sich in Untersuchungen über „Elemente höherer Ordnung“ in der projektiven ebenen Geometrie herausgestellt hat. Es handelt sich aber hier um andere Figuren und um andere Gruppen. „Elemente“ *erster wie höherer „Ordnung“ sind nicht etwas ein für allemal Gegebenes oder eindeutig zu Bestimmendes, sondern sie sind den mannigfachen Bedürfnissen der Geometrie und Gruppentheorie entsprechend je nach Umständen auf verschiedene Weise zu definieren.*

Dies hat F. Engel übersehen, dessen Polemik gegen meine verschiedenen Arten von „Elementen zweiter Ordnung“ der projektiven Geometrie (Leipz. Ber. 1902, S. 19) ich für dogmatisch halten muß. Einen „Standpunkt der Berührungstransformationen“, von dem aus man zu Definitionen kommen könnte, die jedem Bedürfnis in der Geometrie jeder speziellen Gruppe solcher Transformationen genügen, gibt es gar nicht. „Elemente“, die zur allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen passen, bilden notwendig nicht-abgeschlossene Kontinua. Schon aus diesem Grunde können sie dem Bedürfnis der Algebra nicht genügen.

Berichtigung. Mathem. Ann. 88, S. 237, Zeile 10 v. o. lies statt „Kurven“: „nichtäquianharmonischen Kurven“. (Vgl. S. 235, Satz XII und S. 240.)

(Fortsetzung folgt.)

(Eingegangen am 10. 7. 1921.)



## Bemerkung zu E. Studys Aufsatz: „Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln“.

Von  
Hans Mohrmann in Basel.

---

Es wird nur der ein guter Geometer sein, dessen  
Raumanschauung nicht zu kümmerlich entwickelt ist.  
Study.

Dem geometrisch-interessierten Leser dieser Annalen wird es aufgefallen sein, daß Herr Study in seinem großen Aufsatz „Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln“ (86, S. 40–77; 87, S. 207–228; 88, S. 215–241), in dessen Einleitung er einer meiner Arbeiten in freundlichster Weise gedenkt, von einer anderen keine Notiz nimmt, obwohl gerade diese einige Ergebnisse Studys (z. B. in den Sätzen VI, VIII, IX, X, XI) antizipiert, so insbesondere die Bemerkung, daß die einem und demselben linearen Komplex zugeordnete Asymptotenlinie auf einer allgemeinen Netzfläche (Regelfläche einer nicht-singulären linearen Kongruenz) zerfallen kann. Herr Study weist ausdrücklich (88, S. 222, Anm. 51) darauf hin, daß diese Möglichkeit in den Arbeiten von Lie, Klein und Voß unbeachtet geblieben ist, ohne indessen meine zu einem wesentlichen Teile diesem Gegenstande gewidmete Annalen-Arbeit „Über die Haupttangenten-Kurven auf den Netzflächen“ (73 (1912), S. 571 ff.) zu erwähnen. Da Herr Study mitteilt, daß mir das Manuskript seiner Arbeit vorgelegen hat, brauche ich nicht hinzuzufügen, daß ich Herrn Study sofort nach Einblick in sein Manuskript (Ende des Jahres 1916) auf die schöne Übereinstimmung unsrer Resultate aufmerksam gemacht habe. Herr Study versprach mir dann auch, bei der Drucklegung seiner Arbeit hierauf hinweisen zu wollen. Um so auffälliger muß es erscheinen, daß dies nicht geschehen ist<sup>1)</sup>, und manchem Leser mag das Schopenhauersche Wort vom Sekretieren auf die Lippen kommen.

---

<sup>1)</sup> S. Studys Erklärung am Ende dieser Note.

Ein merkwürdiger Umstand will es nun, daß der Ankläger Studys zugleich als sein Verteidiger auftreten kann. Ich hatte mir nämlich erlaubt, Herrn Study auf ein Versehen aufmerksam zu machen, das ihm unterlaufen ist. Und man darf doch wohl mit Bestimmtheit annehmen, daß Herr Study dieses ausgemerzt hätte, wenn er der Bösewicht wäre, der zu werden er uns einst angekündigt hatte.

Der Sachverhalt ist leicht dargelegt und gewinnt vielleicht noch dadurch an Interesse, daß er zu einem kleinen Triumph der sogenannten Raumanschauung gestaltet werden kann<sup>2)</sup>, dieser Himmelsgabe des wahren Geometers<sup>3)</sup>, die dank ihrer zur Mode gewordenen Geringschätzung bei der jüngeren Mathematiker-Generation so mangelhaft gepflegt und ausgebildet ist, daß sie zu einem verkümmerten Organ degeneriert ist, dem Appendix des menschlichen Blinddarms vergleichbar. Wer nicht ordentlich rechnen kann, verrechnet sich leicht; und wer nicht ordentlich sehen kann, versteht sich leicht. Aber dem Sehenden wird kein Blinder weismachen, daß man nichts sehen *könne*, weil er selbst nichts sieht. —

Herr Study hat in vortrefflicher Übereinstimmung mit meinen Resultaten gefunden, daß die für den Zerfall der Haupttangente-Kurven auf den algebraischen Netzflächen *notwendige* Bedingung nur für die Flächen vom Geschlecht  $p = 0$  auch hinreichend ist, und erläutert die hieraus erwachsenden Schwierigkeiten durch ein Beispiel (88, S. 223) genau wie ich es getan habe (73, S. 590). Jene notwendige *Bedingung* lautet in der Sprache meiner Arbeit, daß die (irreduzible, allgemeine) Netzfläche keine oder nur Dorsallinien gerader Ordnung besitze<sup>4)</sup> (a. a. O., S. 580). Die zugehörigen Kuspidalpunkte jener Dorsallinien können dabei auf einer oder auch auf beiden Leitgeraden der Netzfläche liegen. Nach gewissen Ausführungen Herrn Studys gewinnt es den Anschein, als müßten jene Kuspidalpunkte „alle auf dieselbe Leitlinie fallen“ (88, S. 224). Infolgedessen übersieht Herr Study bei der Aufzählung der Kurven  $x(t)$ , die zu einem „Vereine 4. Grades“ gehören (88, S. 223—225), einen von den übrigen wesentlich unterschiedenen Fall, nämlich die Kurve mit den Charakteren (in Studys Bezeichnung)

$$\begin{array}{ll} n_1 = 6, n_2 = 8, n_3 = 6 & \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 3, \varrho = 3 \\ d = 2 \end{array} \right\} \\ w_1 = 2, w_2 = 2, w_3 = 2 & \end{array}$$

<sup>2)</sup> Insofern sich zeigt, daß der Anschauung nicht nur *heuristischer*, sondern auch (und zwar bei keineswegs trivialen Fragen) *kritischer* Wert zukommt.

<sup>3)</sup> Vgl. die treffenden Ausführungen über den Wert der Anschauung in Studys erkenntnistheoretischer Untersuchung über *Mathematik und Physik* (Sammlung Vieweg, Heft 65 (1923), S. 18 ff.), der auch das Motto dieser Note entnommen ist.

<sup>4)</sup> Eine (nicht-singuläre) Dorsallinie gerader Ordnung ist in Studys Bezeichnung durch ein Symbol  $(0, u, 0)$  charakterisiert, wo  $u$  eine ungerade Zahl bedeutet.

In meiner Ausdrucksweise handelt es sich um eine Netzfläche  $(3, 3)$ , das Plückersche liniengeometrische Bild jener Kurve  $x(t)$ , mit zwei getrennten dreifachen Leitgeraden ( $n_1 = 3, n_2 = 3$ ), zwei Doppel- und zwei stationären Erzeugenden ( $d = 2, r = 2$ ) sowie je einer Dorsallinie 2. Ordnung beider Systeme  $t_1^2 = 1, t_2^3 = 1$ . Die Existenz dieser Netzfläche (und ihre einfache geometrische Definition) ist *evident*, wenn man sich nur Studys Problem für  $r = 4$  in die Sprache meiner Arbeit überträgt, nämlich: *alle (allgemeinen) Netzflächen zu bestimmen, deren Erzeugende Schmiegungsstrahlen einer gewundenen Kurve 4. Ordnung 2. Art mit zwei stationären Tangenten " $C_2^4$ " (a. a. O., S. 594) sind.* Da jede " $C_2^4$ " einem (allgemeinen) linearen Komplex angehört, handelt es sich demnach darum, die Orte von Schmiegungsstrahlen der " $C_2^4$ " zu bestimmen, die eine gerade Linie  $g$  treffen, die nicht selbst Schmiegungsstrahl der " $C_2^4$ " ist. (In letzterem Falle erhält man die parabolischen — einer speziellen linearen Kongruenz angehörenden — Netzflächen.) Man gewinnt auf diese Weise mühelos die von Herrn Study aufgezählten Fälle mitsamt zahlreichen Unterfällen. (Beispielsweise ergibt sich Studys erster Typus, wenn die gerade Linie  $g$  sich der " $C_2^4$ " gegenüber in allgemeinsten Lage befindet; zwei leicht charakterisierbare Unterfälle dieses Typus ergeben sich, wenn  $g$  immer noch weder mit einem Punkt, noch dual mit einer Schmiegungebene der " $C_2^4$ " inzidiert, aber eine oder beide stationären Tangenten der " $C_2^4$ " trifft usw.<sup>3)</sup>) Die inkriminierte Fläche erhält man, wenn  $g$  Sekante der " $C_2^4$ " in einer ihrer Schmiegungebenen allgemeiner Lage ist, d. h. wenn man  $g$  in einer beliebigen nicht-singulären Schmiegungebene (mit dem Berührungspunkte  $P$ ) durch den vierten Schnittpunkt  $Q$  der " $C_2^4$ " mit jener Ebene zieht. Die Gerade  $g$  und ihre reziproke Polare in bezug auf den linearen Komplex, dem die Kongruenz der Schmiegungsstrahlen der " $C_2^4$ " angehört, sind die Leitgeraden der Fläche, die also durch  $Q$  bzw.  $P$  hindurchgehen; und die Tangenten der " $C_2^4$ " in  $P$  und  $Q$  sind die in Rede stehenden Dorsallinien 2. Ordnung. Für das liniengeometrische Bild der von Herrn Study übersehenen Kurve  $x(t)$  gilt also der Satz:

*Ort der Schmiegungsstrahlen einer gewundenen Kurve 4. Ordnung 2. Art mit zwei stationären Tangenten " $C_2^4$ ", die eine gerade Linie treffen, die gleichzeitig mit einem Punkt und einer Schmiegungebene der " $C_2^4$ " inzident ist, ohne selbst Schmiegungsstrahl zu sein, ist eine (allgemeine) Netzfläche 6. Grades mit zwei dreifachen Leitgeraden, zwei (im allgemeinen — s. oben — getrennten) stationären und zwei Doppelerzeugenden. Sie besitzt zwei hyper-*

<sup>3)</sup> Eine vollständige Diskussion der allgemeinen und parabolischen Netzflächen, die " $C_2^4$ " zu Haupttangentenkurven haben, wird in analytisch-liniengeometrischer Behandlung, angeregt durch Vorträge in meinem Seminar im letzten Sommer-Semester, demnächst Herr Paul Moor (Basel) geben.

*bolische Erzeugende und je eine Dorsallinie 2. Ordnung in beiden Systemen von Erzeugenden-Tripeln.*

Es sei mir gestattet noch einen anderen Punkt zu erörtern, weil er mir zu lehren scheint, daß trotz der außerordentlichen Vollkommenheit der Studyschen Formeln, die die charakteristischen Zahlen der (allgemeinen) Netzflächen mit ihren Haupttangentenkurven verbinden (87, S. 218 ff., Satz VI) gewisse *Plückersche Äquivalenzformeln* doch nicht entbehrt werden können. Herr Study betrachtet (88, S. 231) den Ort der Schmiegungsstrahlen einer gewissen einem linearen Komplex angehörenden Kurve 5. Grades 7. Ranges mit einem stationären Punkt (in Vereinigung mit einer stationären Ebene, wie es sein muß, Charakteristik (101)) und zwei stationären Tangenten, die die Verbindungsgerade jenes stationären Punktes mit dem Berührungspunkte einer der beiden stationären Tangenten treffen. Der Ort ist eine (allgemeine) Netzfläche mit einer doppelten und einer fünf-fachen Leitgeraden mit den Charakteren in Studys Bezeichnung:

$$n_1 = 7, \quad n_2 = 10, \quad n_3 = 7; \quad \lambda = 2,$$

$$w_1 = 2, \quad w_2 = 4, \quad w_3 = 5; \quad \varrho = 5,$$

wobei sich die stationären Elemente  $w$  auf folgende singuläre Zweige verteilen: (001), hyperbolische Erzeugende; (100), stationäre Erzeugende; (030), Dorsallinie 4. Ordnung; und endlich (111), d. i. eine Dorsallinie 2. Ordnung, die sich mit einer stationären und einer hyperbolischen Erzeugenden vereinigt hat. Herr Study sagt nun, die Kurve  $x(t)$ , deren Plückersches liniengeometrisches Bild jene Netzfläche ist, habe zwei Selbstdurchsetzungen. Dies ist nicht richtig; vielmehr lehrt die Plückersche Äquivalenzformel, nach der eine sogenannte (gewöhnliche) Schnabelspitze einer ebenen Kurve mit der Charakteristik (11) (in Studys Bezeichnung) einem stationären Punkte, einer stationären Tangente und einem *Doppelpunkte* (sowie dual einer Doppeltangente) in den Plückerschen Formeln äquivalent ist, daß jene ausgezeichnete Dorsallinie 2. Ordnung (111) auch eine gewöhnliche Doppelerzeugende absorbiert hat, so daß die Netzfläche sich tatsächlich nurmehr längs einer Erzeugenden selbst durchsetzt.

Da eine solche ausgezeichnete Dorsallinie 2. Ordnung (111) schon bei den Netzflächen auftreten kann, deren Erzeugende Schmiegungsstrahlen einer " $C_3^4$ " sind, so kann man sich den Sachverhalt vortrefflich veranschaulichen, wenn man nur beachtet, daß jeder Schmiegungsstrahl einer " $C_2^4$ ", der die Kurve nochmals trifft, *doppelter* Schmiegungsstrahl, sogenannte *Hauptsehne*, ist. (Vgl. 73, S. 595.) Ort dieser doppelten Schmiegungsstrahlen ist eine allgemeine Netzfläche 3. Grades, die die beiden stationären Tangenten der " $C_3^4$ " zu Dorsallinien (1. Ordnung), ihre Berührungspunkte zu Kuspidalpunkten hat. Die Netzfläche der Schmiegungsstrahlen

einer " $C_3^4$ ", die eine Gerade  $g$  allgemeiner Lage treffen, hat demnach drei Doppelerzeugende (Erzeugende, längs denen die Fläche sich selbst durchsetzt) — Studys Typus 5a (88, S. 224). Ist  $g$  Sekante allgemeiner Lage, so hat die Netzfläche zwei Doppelerzeugende — Studys Typus 5b; wird aber  $g$  Sekante (im übrigen allgemeiner Lage) durch den Berührungspunkt einer stationären Tangente der " $C_3^4$ ", so erhält die Netzfläche\*) in jener Tangente eine ausgezeichnete Dorsallinie 2. Ordnung der in Rede stehenden Art mit der Charakteristik (111). Man sieht aus dem Gesagten ganz unmittelbar, daß jene Dorsallinie 2. Ordnung (111) außer einer stationären (100) und einer hyperbolischen (001) auch eine Doppelerzeugende verschluckt hat. Denn eine Gerade  $g$  allgemeiner Lage durch einen Kuspidalpunkt einer Netzfläche 3. Grades wird außer von der zugehörigen Dorsallinie nur noch von einer Erzeugenden der Fläche getroffen.

Basel, den 14. März 1923.

(Eingegangen am 17. 3. 1923.)

#### Nachwort von E. Study.

Es ist mir hochehrfreulich, daß einige in meiner Arbeit enthaltene Versehen so schnell eine Berichtigung gefunden haben. Auch mit seiner Beschwerde, die er übrigens in einer niedlichen humoristischen Form vorgetragen hat, hat Herr Mohrmann leider ganz recht. Aus vielfältiger eigener Erfahrung weiß ich, wie verdrießlich und unter Umständen niederdrückend es sein kann, wenn man glauben muß, in den Wind geredet zu haben. Zu meiner Entschuldigung kann ich nur mein elendes Gedächtnis anführen, für das sechs Jahre des noch immer nicht beendeten Krieges zu viel waren, und daß ich von anderen Dingen eingenommen war, als die Korrekturen endlich kamen. Gewiß werden wir von Herrn Mohrmann noch vieles Gute zu erwarten haben.

Sehr einverstanden bin ich auch mit einer allgemeineren Bemerkung, in der auf überraschende Weise der Wurmfortsatz des menschlichen Blinddarms in der mathematischen Literatur erscheint. Der von Mohrmann beschriebene Sachverhalt besteht wirklich, und es ist das auch gar kein Wunder. Seit jener Zeit, da in Deutschland die Berliner Schule überwiegenden Einfluß gewann, ist in der offiziellen Vertretung der Geometrie an deutschen

\*) (die nach wie vor eine drei- und eine vierfache Leitgerade hat).

Universitäten ein steter Rückgang festzustellen gewesen, und heute sind wir glücklich soweit, daß sogar an einigen unserer größten Universitäten Forscher, die den Schwerpunkt ihrer Tätigkeit im Gebiete der höheren Geometrie haben, überhaupt nicht mehr zu finden sind. Auch mehren sich, besonders unter jüngeren, die Mathematiker, zu deren genotypischer Veranlagung eine gut entwickelte Raumanschauung entschieden nicht gehört, und die sich dieser ihrer Unfähigkeit zu anschaulichem Denken und ihrer Unkenntnis geometrischer Dinge beinahe noch rühmen. Daß von seiten einseitiger, wenn auch scharfsinniger. Analysten und Formalisten zur Beseitigung der Ausschläge, mit denen „der schöne Leib“ der neueren Geometrie bedeckt war, nichts geschehen ist, läßt sich denken. Der heutige Zustand ist als entschieden ungesund zu betrachten, es würde aber auch dann, wenn überall die nötige Einsicht vorhanden wäre, noch lange dauern müssen, bis er gründlich beseitigt werden kann, da man eben die beinahe zum Aussterben gebracht hat, die man dazu nötig haben würde.

(Eingegangen am 8. 4. 1923.)



